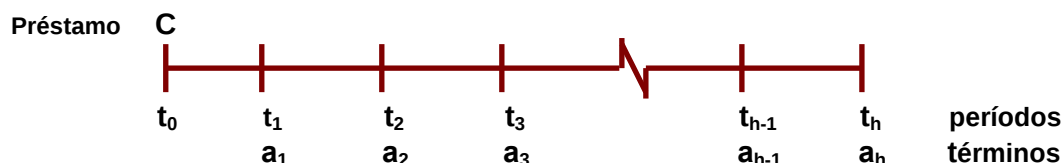


TEMA 8: PRÉSTAMOS

1. INTRODUCCIÓN

Un **préstamo** es una operación en la que una persona (prestamista), entrega a otra (prestatario) una cantidad de dinero **C**, quien se compromete a devolver el capital recibido y a pagar los intereses correspondientes en los plazos y forma convenidas.

Se denomina amortización de un préstamo a la devolución o reembolso, por parte del prestatario, del importe del préstamo junto con los intereses generados en los plazos acordados. Gráficamente, por ejemplo:



En sentido financiero debe interpretarse que **lo que entrega el prestamista debe ser igual a lo que recibe del prestatario**, todo ello valorado en un mismo momento de tiempo, al tipo de interés fijado para el préstamo.

1.1 ELEMENTOS DE UN PRÉSTAMO

Partiendo de la representación anterior vamos a enumerar los elementos principales que intervienen en una operación de préstamo:

- C** = **Capital prestado**, importe del préstamo. También denominado **C₀** o **P**.
- t₁, t₂, ..., t_h** = **Instantes de tiempo** en los que se hacen efectivos los términos amortizativos. Si están referidos a la misma unidad de tiempo y son equidistantes → **k₁, k₂, ..., k_n**.
- i₁, i₂, ..., i_h** = **Tantos de interés** que se aplican en los distintos periodos de tiempo. Frecuentemente **i** es constante e igual a lo largo de todos los períodos de amortización.
- a₁, a₂, ..., a_h** = **Pago realizado** para extinguir la deuda, comprende una parte para el pago de intereses **i_h**, y otra para amortizar el capital prestado **C_h**. Cuando es periódico se le suele denominar: anualidad, mensualidad, etc. **a_h = C_h + i_h**
- C₁, C₂, ..., C_h** = **Cuotas de amortización** o cuotas de capital de cada uno de los respectivos periodos. Su finalidad es restituir el importe del préstamo. **C_h = a_h - i_h**
- i₁, i₂, ..., i_h** = **Cuotas de interés** de cada uno de los periodos. Representan los intereses que en cada periodo genera el capital pendiente de amortizar. **i_h = a_h - C_h**
- T₁, T₂, ..., T_h** = **Total amortizado** hasta el momento **t_h**. Es igual a la suma de las cuotas de amortización **C_h** hasta el periodo **t_h**. Se puede calcular: **C₁ + C₂, ..., C_h** o bien **T_h = C₀ - R_h**
- R₁, R₂, ..., R_h** = **Resto por amortizar** hasta el momento **t_h**, también llamado capital vivo o capital pendiente. **R_h = C₀ - T_h**

1.2 CLASIFICACIÓN DE LOS PRÉSTAMOS

La variedad de préstamos existentes pueden agruparse, atendiendo a diferentes criterios de clasificación:

1. Según el prestamista:
 - a. Préstamos **Bancarios**.
 - b. Préstamos **No bancarios**.
2. Por su destino:
 - a. De **Consumo**.
 - b. A la **Producción**:
 - 1º) De Circulante.
 - 2º) De Inversión.
3. Según la garantía:
 - a. **Personales**.
 - b. **Reales**.

4. Por la forma de documentarse:
 - a. En **póliza**.
 - b. En **escritura pública**.
5. Según el tipo de interés:
 - a. Interés **fijo**.
 - b. Interés **variable**.
 - c. Interés **revisable**.
6. Por la forma de amortización:
 - a. Amortizables con **reembolso único**.
 - 1º) Con pago único de intereses.
 - 2º) Con pago periódico de intereses.
 - b. Amortizables **mediante una renta**:
 - 1º) Amortización con fondo de amortización: Sistema Americano "sinking fund".
 - 2º) Método de amortización de anualidades constantes: Francés.
 - 3º) Método de amortización de cuotas constantes.
 - 4º) Métodos de amortización con anualidades variables en progresión: aritmética o geométrica.
 - 5º) Método de amortización Alemán.

Nosotros nos centraremos en este último criterio de clasificación y estudiaremos los métodos más frecuentes en la práctica financiera.

2 PRÉSTAMOS AMORTIZABLES MEDIANTE REEMBOLSO ÚNICO

Sea **C** el capital prestado, **n** la duración del préstamo e **i** el tanto de interés anual compuesto al que se realiza la operación.

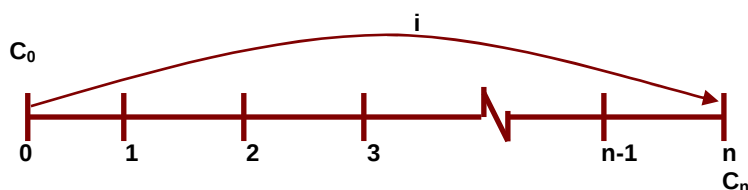
Si el préstamo se amortiza mediante reembolso único implica que el capital **C**, se devuelve de una sola vez en la fecha que se haya convenido.

Además de devolver el capital, el prestatario está obligado a pagar los intereses y según el vencimiento de estos se pueden distinguir dos casos:

- a) **pago único** de intereses.
- b) **pago periódico** de intereses.

2.1 PAGO ÚNICO DE INTERESES JUNTO AL CAPITAL

Si los intereses correspondientes no se pagan en cada periodo, sino que se van acumulando al capital, en el momento **n** habrá que devolver, el capital más los intereses generados, es decir, el montante. Gráficamente lo podemos representar:

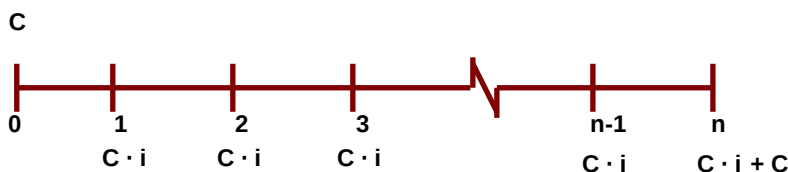


Y su expresión financiera:

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

2.2 PAGO PERIÓDICO DE INTERESES

En este sistema, también llamado "**préstamo americano**", los intereses se pagan en cada periodo y el capital en el momento **n**. Gráficamente lo podemos representar:



Como el capital que se debe es siempre el mismo, los intereses de cada año serán iguales y se obtendrán como resultado de multiplicar el tanto unitario de interés por el capital prestado:

$$I_h = C \times i$$

Ejemplo

Nos conceden un préstamo de 70.000 euros al 8% de interés compuesto anual. Si la duración del mismo es de 6 años, calcular cuánto tendremos que pagar:

- Si se amortiza el préstamo mediante reembolso único de capital e intereses.
- Si se amortiza el préstamo mediante reembolso único de capital y pagándose los intereses cada año.

a) Pago único:

$$C_n = 70.000 \times (1,08)^6$$

$$C_n = 11.081,20 \text{ €}$$

b) Pago periódico:

Intereses anuales:	$I_1 \text{ a } I_6 = 70.000 \times 0,08 = 5.600 \text{ €}$
Principal	$C_6 = 70.000 \text{ €}$

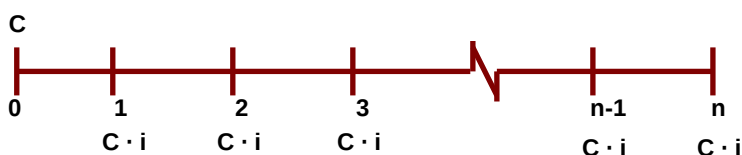
2.3 AMORTIZACIÓN POR EL SISTEMA AMERICANO CON FONDO DE CONSTITUCIÓN (SINKING FOUND)

Este sistema (también llamado Sinking Found o fondo de amortización), es una variante del préstamo americano. Es más un método de reconstrucción que de amortización ya que se trata de ir dotando unas cantidades a un fondo con el fin de reconstruir el capital prestado.

Realmente se trata de **dos operaciones**:

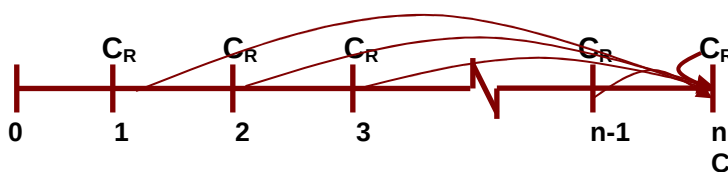
1. Pago periódico de intereses:

$$I_h = C \times i$$

**2. Creación de un fondo** (en la misma entidad que concede el préstamo o en otra distinta), llamado de constitución en el que se intenta constituir el principal con aportaciones periódicas, de forma que éste se obtenga en el momento n.

Los periodos de tiempo y los tantos en ambas operaciones no tienen porque coincidir. Del mismo modo las cantidades depositadas no tienen por que ser constantes.

Si queremos constituir un fondo C , para el caso de que las cuotas sean constantes C_R y el tipo de interés que paga el fondo es i_r , podemos representarlo:



Cuya expresión financiera podría ser:

$$C = C_R \times S_{n, i_r}$$

despejando C_R :

Como nuestro prestatario debe de pagar tanto los intereses, como ingresar la cantidad correspondiente en el fondo, necesitará anualmente:

$$A = C \times i + \frac{C}{S_{n, i_r}}$$

Se podría elaborar un cuadro donde se reflejaran tanto los pagos de intereses como la devolución del capital.

Años	Anualidad	Interés del préstamo	Capital devuelto

Y otro que recoja la reconstrucción del capital.

Años	Cuota de reconstrucción	Interés del fondo	Capital Reconstruido	Capital Pendiente de reconstruir

O bien, uno por agrupación de los dos anteriores.

Años	Anualidad	Interés del préstamo	Cuota de reconstrucción	Interés del fondo	Capital Reconstruido	Capital Pendiente de reconstruir

Ejemplo 1

La empresa Americano S.A. ha conseguido un préstamo de 20.000 euros por el se pagarán anualmente intereses al 15%, devolviéndose el principal a los cuatro años de la concesión. El prestatario gestiona la creación de un fondo remunerado al 12% anual. Reconstruir el capital con aportaciones periódicas constantes.

$$A = 20.000 \times 0,15 + \frac{20.000}{S_{4, 0,12}}$$

$$A = 3.000 + \frac{20.000}{4,779328}$$

$$A = 3.000 + 4.184,69$$

$$A = 7.184,69 \text{ €}$$

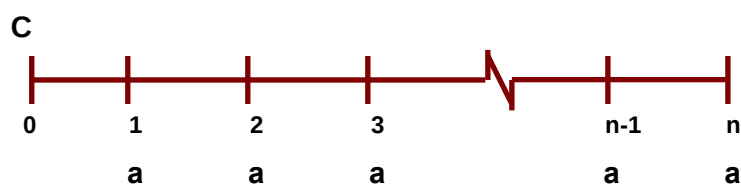
Años	Anualidad	Interés del préstamo	Cuota de reconstrucción	Interés del fondo	Capital reconstruido	Capital pendiente de reconstruir
0					0,00	20.000,00
1	7.184,69	3.000,00	4.184,69	0,00	4.184,69	15.815,31
2	7.184,69	3.000,00	4.184,69	502,16	8.871,54	11.128,46
3	7.184,69	3.000,00	4.184,69	1.064,58	14.120,81	5.879,19
4	7.184,69	3.000,00	4.184,69	1.694,50	20.000,00	0,00
	28.738,76	12.000,00	16.738,76	3.261,24		

3. SISTEMA FRANCÉS O DE AMORTIZACIÓN PROGRESIVA

3.1 INTRODUCCIÓN

Los préstamos amortizables mediante rentas tienen su manifestación más frecuente en el préstamo francés, que se caracteriza por tener todos los términos amortizativos iguales y el tipo de interés igual a lo largo de toda la operación.

Al final de cada periodo se entrega una cantidad constante llamada anualidad o término amortizativo. Gráficamente:



Por tanto, si la renta es anual, debe cumplirse:

$$C = A \times A_{n,i}$$

Donde cada anualidad es la suma de la cuota de interés y la cuota de amortización correspondiente al año de que se trate.

$$A_h = C_h + I_h$$

Como cada año se pagan los intereses correspondientes a dicho periodo, y estos irán decreciendo a medida que se devuelve el préstamo:

$$I_1 > I_2 > I_3 > \dots > I_{n-1} > I_n$$

Este sistema se llama también progresivo, porque a medida que transcurre el tiempo las cuotas destinadas a la amortización de capital van siendo cada vez mayores.

I_1	I_2	I_3	$\dots$	I_{n-1}	I_n
C_1	C_2	C_3	$\dots$	C_{n-1}	C_n

3.2 CUADRO DE AMORTIZACIÓN DE UN PRÉSTAMO POR EL SISTEMA FRANCÉS

Con el fin de resumir y clarificar las operaciones de amortización, se recurre normalmente a la confección de un cuadro, en el que se recogen los distintos valores que toman las variables y que podría tener el siguiente formato:

Periodos n	Anualidad a	Cuota de Interés I_h	Cuota de Amortización C_h	Total Amortizado T_h	Resto por amortizar R_h

Antes de proceder a su confección, veamos como se pueden obtener los distintos elementos que lo componen.

- Anualidad**

La anualidad, o pago periódico, que amortiza el préstamo se calcula:

$$A = \frac{C}{A_{n,i}}$$

- Cuota de Interés**

El interés de cada año se obtiene como resultado de aplicar el tanto unitario de interés i al capital pendiente por amortizar el periodo anterior, R_{h-1} . Esta cuota irá decreciendo cada periodo, debido a la disminución del capital pendiente de amortizar.

$$I_h = R_{h-1} \times i$$

- Cuota de Amortización**

Es la parte de la anualidad que se destina a la amortización del capital prestado. Esta cuota irá aumentando en la misma medida en que disminuya la parte destinada al pago de intereses (ver 3.3).

$$C_h = A_h - I_h$$

- Total Amortizado**

Es la suma de las cuotas pagadas hasta el momento h .

$$T_h = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_h$$

$$T_h = T_{h-1} + C_h$$

- Pendiente de amortizar**

También llamado capital vivo, es la parte del capital que queda pendiente por amortizar y se obtiene como diferencia entre el valor del préstamo C y el total amortizado hasta el periodo h .

$$R_h = C - T_h$$

$$R_h = R_{h-1} - C_h$$

Ejemplo: Realiza el cuadro de amortización de un préstamo de 20.000 €, a un tanto de interés del 10 % anual y una duración de 4 años. El sistema de amortización es el francés.

Periodos (n)	Anualidad (a)	Cuota de Interés (I _h)	Cuota de Amortización (C _h)	Total Amortizado (T _h)	Resto por amortizar (R _h)
	$V_0 = A \times A_{n,i}$	Pendiente de amortizar año anterior por tanto de interés	Anualidad – Cuota de interés	Total amortizado año anterior + Cuota de amortización	Importe préstamo – Total amortizado
0	0	0	0	0	20.000
1	6.309,42	2.000 (20.000 x 0,10)	4.309,42 (6.309,42 – 2.000)	4.309,42 (0 + 4.309,42)	15.690,58 (20.000 – 4.309,42)
2	6.309,42	1.569,06 (15.690,58 x 0,10)	4.740,36 (6.309,42 – 1.569,06)	9.049,78 (4.309,42 + 4.740,36)	10.950,22 (20.000 – 9.049,78)
3	6.309,42	1.095,02 (10.950,22 x 0,10)	5.214,40 (6.309,42 – 1.095,02)	14.264,18 (9.049,78 + 5.214,40)	5.735,82 (20.000 – 14.264,18)
4	6.309,42	573,58 (5.735,82 x 0,10)	5.735,84 (6.309,42 – 573,58)	20.000,02 (5.735,84 + 14.264,18)	- 0,02 (20.000 – 20.000,02)
			20.000,02		

CARACTERÍSTICAS:

1. Las anualidades siempre son del mismo importe.
2. La anualidad es igual a la suma de la cuota de interés más la cuota de amortización.
3. Las cuotas de intereses son decrecientes, porque se calcula sobre el pendiente de amortizar y cada vez queda menos por devolver.
4. Las cuotas de amortización son crecientes.
5. La columna pendiente de amortizar nos indica la cantidad que tenemos que pagar para cancelar el préstamo en cada periodo.

3.3 CÁLCULO DE LA FILA h-esima DEL CUADRO DE AMORTIZACIÓN

Se trata de conocer la situación del préstamo en un momento cualquiera h , sin necesidad de calcular los valores correspondientes a las filas anteriores.

- Anualidad del periodo h**

Si queremos calcular la anualidad o pago correspondiente a un periodo cualquiera h y teniendo en cuenta que son todas iguales, tendremos:

$$A_h = \frac{C}{A_{n,i}}$$

- Cuota de Interés del periodo h**

Para calcular la cuota de interés del periodo h , bastará con conocer el capital pendiente en el periodo anterior y multiplicarlo por el tanto de interés:

$$I_h = R_{h-1} \times i$$

- Cuota de Amortización del periodo h**

Las cuotas de amortización varían, de un periodo a otro, en progresión geométrica de razón $(1+i)$. Para su demostración partiremos de dos anualidades consecutivas:

$$C_h (1+i) = C_{h+1}$$

$$C_1 = \frac{C}{S_{n,i}}$$

Si queremos una C_h cualquiera y sabiendo que $C_h = C_1 (1+i)^{h-1}$, podemos expresarla:

$$C_h = \frac{C}{S_{n,i}} \times (1+i)^{h-1}$$

- Total Amortizado**

Es la suma de las cuotas pagadas hasta el momento h .

$$T_h = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_h$$

Teniendo en cuenta lo visto en el apartado anterior, también lo podemos expresar:

$$T_h = C_1 \times S_{h,i}$$

- **Resto por Amortizar**

Desde un modo retrospectivo podemos expresarlo:

$$R_h = C - T_h$$

Y desde un modo prospectivo, valorando todos los pagos que quedan pendientes en h:

$$R_h = A \times A_{n-h,i}$$

También podríamos acudir al método recurrente:

$$R_h = R_{h-1} (1+i) - A_h$$

Ejemplo 1

Calcular la fila sexta del cuadro de amortización de un préstamo de 100.000 euros que se amortiza mediante una renta constante, anual, inmediata postpagable de 10 términos, al 7% de interés compuesto anual.

$C = 100.000$

$n = 10$

$i = 7\%$

Fila sexta = x

$$A_6 = \frac{100.000}{A_{10:0,07}} = 14.237,75 \text{ €}$$

$$R_5 = 14.237,75 \times A_{5:0,07} = 58.377,59 \text{ €}$$

$$I_6 = R_5 \times i$$

$$I_6 = 58.377,59 \times 0,07 = 4.086,43 \text{ €}$$

$$C_1 = \frac{100.000}{S_{10:0,07}} = 7.237,75 \text{ €}$$

$$C_6 = 7.237,75 \times (1,07)^{6-1} = 10.151,32 \text{ €}$$

$$T_6 = 7.237,75 \times S_{6:0,07} = 51.773,73 \text{ €}$$

$$R_6 = 14.237,75 \times A_{10-6:0,07} = 48.226,27 \text{ €}$$

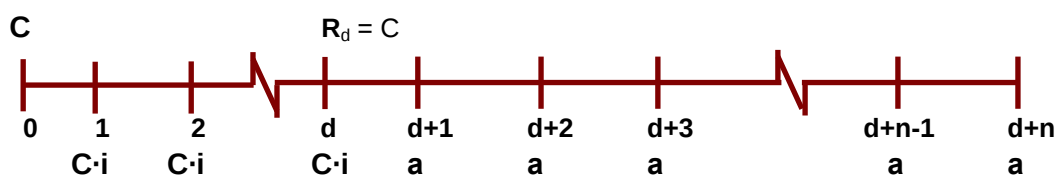
3.4 PRÉSTAMOS CON PERIODO DE CARENCIA

En los apartados anteriores hemos considerado que el préstamo se amortiza mediante una renta anual, constante, temporal, inmediata y postpagable. Sin embargo, ocurre con cierta frecuencia que los préstamos tienen un **periodo de carencia**, es decir, un periodo de tiempo, normalmente, al principio de la operación, durante el cual no se amortiza el capital prestado.

Surge de este modo un préstamo que se amortiza mediante una renta diferida, siendo **d** el periodo de carencia. Ante esta situación podemos plantear dos casos:

- **Durante el periodo de carencia (d) sólo se paguen intereses. Carencia parcial**

Gráficamente



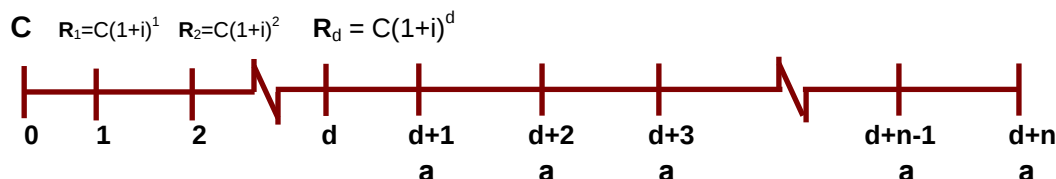
De modo que, si durante el diferimiento (carencia) **pagamos** los intereses $C \cdot i$, en el momento d , solo debemos C y, por tanto, el resto del gráfico es igual a un préstamo que se amortiza mediante una renta, ya estudiado en los epígrafes anteriores y cuya anualidad será:

$$A = \frac{C}{A_{n,i}}$$

El cuadro de amortización, salvo en los periodos de carencia en los que habrá que reflejar los pagos de intereses correspondientes, será idéntico al estudiado anteriormente.

- Durante el periodo de carencia (d) no se paguen intereses. Carencia total

Gráficamente



De modo que, si durante el diferimiento (carencia) **no pagamos** los intereses, en el momento d , la deuda será el préstamo más los intereses generados en dicho periodo, es decir, el pendiente en d será $R_d = C(1+i)^d$ y, por tanto, el pago correspondiente:

$$A = \frac{C \times (1+i)^d}{A_{n,i}}$$

El cuadro de amortización tendrá dos partes, la primera durante el periodo de diferimiento, donde se irán acumulando los intereses, y a partir del periodo d será igual que un préstamo sin carencia, siendo el capital pendiente $C(1+i)^d$.

Ejemplo 1

Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 200.000 euros que se amortiza mediante una renta constante, anual, diferida 2 años y postpagable de 4 términos, al 8% de interés compuesto anual:

- Si durante el periodo de carencia se pagan los intereses correspondientes.
- Si durante el periodo de carencia no se pagan los intereses.

Apartado a)

$$I_1 \text{ al } d = 200.000 \times 0,08 = 16.000 \text{ €}$$

$$A = \frac{200.000}{A_{4,0,08}}$$

$$A = 60.384,16$$

y a partir de estos datos rellenamos el cuadro:

CUADRO AMORTIZACIÓN PRÉSTAMO					
n	a	I_h	C_h	T_h	R_h
0	---	---	---	---	200.000,00
1	16.000,00	16.000,00	---	---	200.000,00
2	16.000,00	16.000,00	---	---	200.000,00
3	60.384,16	16.000,00	44.384,16	44.384,16	155.615,84
4	60.384,16	12.449,27	47.934,89	92.319,05	107.680,95
5	60.384,16	8.614,48	51.769,69	144.088,74	55.911,26
6	60.384,16	4.472,90	55.911,26	200.000,00	0,00
	273.536,64	73.536,64	200.000,00		

Apartado b)

$$R_1 = 200.000 \times 1,08 = 216.000$$

$$R_2 = 200.000 \times (1,08)^2 = 233.280$$

$$A = \frac{200.000 \times (1,08)^2}{A_{4:0,08}} = 70.432,09 \text{ €}$$

y su cuadro:

CUADRO AMORTIZACIÓN PRÉSTAMO					
n	a	I _n	C _n	T _n	R _n
0	---	---	---	---	200.000,00
1	---	16.000,00	---	---	216.000,00
2	---	17.280,00	---	---	233.280,00
3	70.432,09	18.662,40	51.769,69	51.769,69	181.510,31
4	70.432,09	14.520,83	55.911,26	107.680,95	125.599,05
5	70.432,09	10.047,92	60.384,16	168.065,11	65.214,89
6	70.432,09	5.217,19	65.214,89	233.280,00	0,00
	281.728,34	48.488,34	233.280,00		

5. PRÉSTAMOS CON CUOTAS CONSTANTES

• INTRODUCCIÓN

La característica principal de este método de amortización de préstamos consiste en que en cada periodo se amortiza la misma parte del capital, es decir, que **todas las cuotas de amortización son iguales** y, por tanto, cada periodo se devuelve la misma cantidad de préstamo.

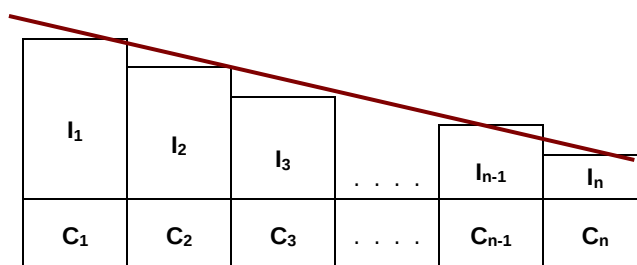
Si el importe del préstamo es **C** y la duración del mismo **n** años, el importe de cada cuota de amortización **C_n**, será:

$$C_n = \frac{C}{n}$$

Como cada año se pagan los intereses correspondientes a dicho periodo, y estos irán decreciendo a medida que se devuelve el préstamo, podemos establecer:

$$I_1 > I_2 > I_3 > \dots > I_{n-1} > I_n$$

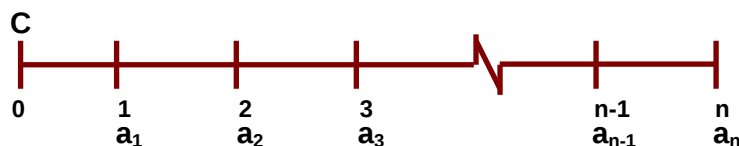
Así, las **anualidades** o pagos serán diferentes y decrecientes, al permanecer las cuotas de amortización constantes y disminuir las cuotas de interés.



Por tanto, dichos pagos no forman una renta constante, sino una renta variable que, como veremos más adelante, lo hace en forma de progresión aritmética decreciente:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{n-1} > A_n$$

Gráficamente



• CUADRO DE AMORTIZACIÓN

Al igual que en los métodos anteriores vamos a proceder a confeccionar un cuadro de amortización teniendo en cuenta las características de este método, y cuyo formato podría ser:

Periodos n	Anualidad A_h	Cuota de Interés I_h	Cuota de Amortización C_h	Total Amortizado T_h	Resto por amortizar R_h

Para ver como se obtienen los distintos elementos que lo componen utilizaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 30.000 euros para amortizar mediante 5 cuotas anuales constantes al 16% de interés compuesto anual.

En primer lugar calculamos el valor de las cuotas cantantes:

$$C_h = \frac{30.000}{5} = 6.000 \text{ €}$$

A partir de este dato procedemos a elaborar el cuadro de amortización correspondiente:

CUADRO AMORTIZACIÓN PRÉSTAMO					
n	a_h	I_h	C_h	T_h	R_h
0	0,00	0,00	0,00	0,00	30.000,00
1	10.800,00	4.800,00	6.000,00	6.000,00	24.000,00
2	9.840,00	3.840,00	6.000,00	12.000,00	18.000,00
3	8.880,00	2.880,00	6.000,00	18.000,00	12.000,00
4	7.920,00	1.920,00	6.000,00	24.000,00	6.000,00
5	6.960,00	960,00	6.000,00	30.000,00	0,00
	44.400,00	14.400,00	30.000,00		

• CÁLCULO DE LA FILA h -ésima DEL CUADRO DE AMORTIZACIÓN

Se trata de conocer la situación del préstamo en un momento cualquiera h , sin necesidad de calcular los valores correspondientes a las filas anteriores.

• Cuota de Amortización del periodo h

Para calcular las cuotas de amortización de un periodo h y al ser todas iguales, bastará con dividir la cuantía del préstamo entre el número de periodos:

$$C_h = \frac{C}{n}$$

• Total Amortizado

El total amortizado no es mas que la suma de las cuotas de amortización pagadas hasta el momento h :

$$T_h = h \times \frac{C}{n}$$

• Resto por Amortizar

Es la parte del préstamo que está pendiente de amortizar:

$$R_h = C - \left(h \times \frac{C}{n} \right)$$

- Cuota de Interés del periodo h**

La cuota de interés de cada periodo es el resultado de aplicar el tanto de interés por el resto por amortizar:

$$I_h = R_{h-1} \times i$$

$$I_h = i \times \left(C - \frac{(h-1)C}{n} \right)$$

- Anualidad del periodo h**

Si queremos calcular la anualidad o pago correspondiente a un periodo cualquiera **h** tendremos que sumar la cuota de amortización y la cuota de interés del periodo:

$$A_h = C_h + I_h$$

donde si sustituimos por los valores obtenidos en los apartados anteriores nos queda:

$$A_h = \frac{C}{n} + C \times i \left(1 - \frac{(h-1)}{n} \right)$$

Ejemplo 1

Calcular la fila sexta del cuadro de amortización de un préstamo de 90.000 euros que se amortiza mediante cuotas constantes anuales, inmediata postpagable de 10 términos, al 5% de interés compuesto anual.

$$C = 90.000$$

$$n = 10$$

$$i = 5\%$$

¿? Fila sexta.

$$C_6 = \frac{90.000}{10} = 9.000$$

$$I_6 = 90.000 \times 0,05 \left(1 - \frac{(6-1)}{10} \right) = 2.250 \text{ €}$$

$$A_6 = 9.000 + 2.250 = 11.250 \text{ €}$$

$$T_6 = 6 \times \frac{90.000}{10} = 54.000 \text{ €}$$

$$R_6 = 90.000 \times \left(1 - \frac{6}{10} \right) = 36.000 \text{ €}$$

6. AMORTIZACIÓN CON PAGOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

6.1 INTRODUCCIÓN

Este sistema de amortización se caracteriza porque las anualidades o pagos varían en progresión geométrica, es decir, cada anualidad se obtienen multiplicando la anterior por la razón q .

Si el importe del préstamo es C y la duración del mismo n años, para obtener el importe de cada pago nos basaremos en las expresiones obtenidas al estudiar las rentas variables en progresión geométrica, donde su expresión será:

$$V_{o(p.g.)} = a_1 \times \frac{1 - q^n \times V^n}{1 + i - q}$$

Ejemplo 1

Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 80.000 euros para amortizar mediante 5 pagos anuales variables, que crecen un 3% cada año si se valora al 12% de interés compuesto anual.

En primer lugar calculamos el valor del primer pago o anualidad:

$$A_1 = \frac{80.000 (1,12 - 1,03)}{1 - (1,03)^5 \times (1,12)^{-5}} = 21.040,53 \text{ €}$$

A partir de este dato, procedemos a elaborar el cuadro de amortización correspondiente: ¹

CUADRO AMORTIZACIÓN PRÉSTAMO					
n	a_n	I_n	C_n	T_n	R_n
0	0,00	0,00	0,00	0,00	80.000,00
1	21.040,53	9.600,00	11.440,53	11.440,53	68.559,47
2	21.671,74	8.227,14	13.444,61	24.885,13	55.114,87
3	22.321,89	6.613,78	15.708,11	40.593,24	39.406,76
4	22.991,55	4.728,81	18.262,74	58.855,98	21.144,02
5	23.681,30	2.537,28	21.144,02	80.000,00	0,00
	111.707,01	31.707,01	80.000,00		

7. AMORTIZACIÓN CON PAGOS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

7.1. CUADRO DE AMORTIZACIÓN

Este sistema de amortización se caracteriza porque las anualidades o pagos varían en progresión aritmética, es decir, cada anualidad se obtienen sumando a la anterior la razón q .

Si el importe del préstamo es C y la duración del mismo n años, para obtener el importe de cada pago nos basaremos en las expresiones obtenidas al estudiar las rentas variables en progresión aritmética, donde su expresión será:

$$V_{o(p.a.)} = a_1 \times A_{n,i} + \frac{q}{i} \times (A_{n,i} - n \times V^n)$$

Ejemplo 1

Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 50.000 euros para amortizar mediante 5 pagos anuales variables, que crecen 1.000 euros cada año si se valora al 10% de interés compuesto anual.

En primer lugar calculamos el valor del primer pago o anualidad:

$$50.000 = a_1 \times A_{5,0,10} + \frac{1.000}{0,10} \times (A_{5,0,10} - 5 \times (1,1)^{-5})$$

$$A_1 = 11.379,75 \text{ €}$$

A partir de este dato, procedemos a elaborar el cuadro de amortización correspondiente:

CUADRO AMORTIZACIÓN PRÉSTAMO					
n	a_h	I_h	C_h	T_h	R_h
0	0,00	0,00	0,00	0,00	50.000,00
1	11.379,75	5.000,00	6.379,75	6.379,75	43.620,25
2	12.379,75	4.362,03	8.017,72	14.397,47	35.602,53
3	13.379,75	3.560,25	9.819,50	24.216,97	25.783,03
4	14.379,75	2.578,30	11.801,44	36.018,41	13.981,59
5	15.379,75	1.398,16	13.981,59	50.000,00	0,00
	66.898,74	16.898,74	50.000,00		

8. CANCELACIÓN ANTICIPADA DE UN PRÉSTAMO

Cancelar anticipadamente un préstamo significa amortizarlo antes del tiempo convenido, modificando así las condiciones establecidas en el contrato. En las condiciones pactadas con el prestamista debe aparecer qué ocurre en el caso de que deseemos cancelar parcial o totalmente el préstamo.

La mayoría de las entidades financieras cobrarán una comisión de cancelación anticipada, que se aplica sobre la cantidad amortizada prematuramente.

Financieramente no supone un gran problema, los pasos a seguir podrían ser:

- Calcular la deuda pendiente en el momento de la cancelación anticipada R_h .
- Calcular la cuantía del nuevo pago después de la cancelación a' .
- Calcular la comisión sobre la cantidad anticipada C_c .

Si aplicamos los pasos anteriores a un préstamo amortizado por el sistema francés, su formulación sería:

$$A = \frac{C}{A_{n,i}}$$

$$R_h = A \times A_{n-h,i}$$

conocido el resto por amortiza, le restamos la cantidad anticipada C_a y obtenemos la deuda pendiente R'_h :

$$R'_h = R_h - C_a$$

a partir de esta cantidad procedemos a calcular la nueva cuantía del pago:

$$R'_h = A' \times A_{n-h,i}$$

por último calculamos la comisión por cancelación C_c correspondiente, que normalmente será un porcentaje sobre la cantidad anticipada:

$$C_c = \frac{C_a \times \% \text{ comisión}}{100}$$

En ocasiones las entidades financieras establecen una **cantidad mínima de comisión**, donde si el resultado anterior es inferior nos cobran dicho mínimo. También pudiera ocurrir que se exija una **cantidad mínima de amortización anticipada** (p. ej. 3.000 €).

Si la periodicidad de los pagos es k-esimal o el sistema de amortización distinto, se tomarán las expresiones correspondientes equivalentes, del sistema o método de amortización, a las aquí utilizadas.

Ejemplo 1

Se contrata un préstamo de 20.000 euros para ser amortizado mediante una renta anual, constante inmediata postpagable de 15 términos, al 10% de interés anual. Entre las cláusulas figura la de penalización por cancelación anticipada del 1%. Averiguar:

- La anualidad que amortiza el préstamo.
- El resto por amortizar a los 3 años de concertado el préstamo, una vez pagada la anualidad.

- c) Si se hace una aportación extraordinaria de 3.000 euros en el momento de pagar la tercera anualidad, hallar:
- El importe total que paga el prestatario en ese momento.
 - El resto por amortizar en ese momento.
 - La anualidad a pagar a partir de ese momento.

a) **Calcular la anualidad que amortiza el préstamo.**

$$A = \frac{20.000}{A_{15; 0,10}} = 2.629,48 \text{ €}$$

b) **Resto por amortizar:**

$$R_3 = 2.629,48 \times A_{15-12; 0,10}$$

$$R_3 = 17.916,44 \text{ €}$$

c) **Pago total (cantidad anticipada más penalización), resto por amortizar y nueva anualidad:**

$$\text{Comisión : } \frac{3.000 \times 1}{100} = 30$$

$$\text{Pago total: } 3.000 + 30 = 3.030 \text{ €}$$

$$R'_3 = 17.916,44 - 3.000 = 14.916,44 \text{ €}$$

$$A' : \frac{14.916,44}{A_{12; 0,01}} = 30$$

9. COSTE EFECTIVO DE LA OPERACIÓN DE PRÉSTAMO. TAE

Hasta ahora se han planteado los préstamos como una operación financiera matemáticamente pura. La prestación y la contraprestación se consideran partes de un contrato directo, de manera que lo entregado por el prestamista y lo devuelto por el prestatario son financieramente equivalentes, de acuerdo con las reglas y condiciones pactadas y, por ello, el tanto efectivo de coste o rendimiento de la operación es el tanto de interés anual compuesto que iguala todos los cobros y todos los pagos actualizados que se generan.

Vamos a ampliar aquí este concepto y vamos a ver la incidencia que los gastos pueden tener, tanto para el prestatario, como para el prestamista. Unos gastos son soportados por el prestamista y otros, la mayoría, por el prestatario.

El prestamista, por sufrir gastos adicionales (de apertura, de cancelación, tasas, impuestos, etc), ve alterada su rentabilidad unitaria pactada en el contrato de préstamo. A su vez, también el prestatario ve alterada su tasa de coste unitario pactada en el contrato, ya que tiene que pagar unos gastos fijos y otros de mantenimiento del préstamo (de apertura, de estudio, notario, registro, de cancelación anticipada total o parcial, tasas, etc.)

Vemos que, en definitiva, el tanto de interés al que se contrata el préstamo no será ni el tanto de rendimiento para el prestamista, ni el de coste para el prestatario, por que para hallar el tanto anual efectivo de la operación habrá que tener en cuenta, en cada caso, todos los ingresos y gastos actualizados.

De forma general, podríamos plantear, tanto para el prestamista como para el prestatario, para obtener el rendimiento o coste de la operación, la siguiente igualdad:

$$\text{RECIBE} = \text{ENTREGA}$$

Es decir, el **tanto efectivo de rendimiento**, para el prestamista **o**, en su caso, el **tanto efectivo de coste**, para el prestatario, es aquel tanto que iguala lo que recibe a lo que entrega, todo ello valorado en un mismo momento de tiempo.

9.1. Tanto efectivo de coste para el prestatario

Nosotros vamos a plantear aquí, únicamente el cálculo del tanto efectivo de coste de una operación de préstamo que se amortiza mediante pagos periódicos constantes, de forma general, pudiendo extenderse estas explicaciones al resto de las situaciones que pudieran plantearse en la práctica financiera.

Supongamos un préstamo de cuantía **C**, por el que ha de pagarse una comisión de apertura de **x%** y que se amortiza mediante una renta, constante inmediata postpagable, de cuantía **a** durante **n** años al tanto anual **i**, si aplicamos la ecuación fundamental, gráficamente:

RECIBE

C - x% C



ENTREGA



Por tanto, tendrá que cumplirse, financieramente hablando, que lo que recibe sea igual a lo que entrega:

$$C - x \% C = a \times a_{n, i_{ec}}$$

De donde se trata de despejar el valor que toma la variable i_{ec} (interés efectivo de coste). Para obtener su valor hay varias posibilidades:

- Tablas financieras, e interpolación, en su caso.
- Utilización de hoja de cálculo y su correspondiente función financiera (TIR).
- Aproximaciones sucesivas.

Ejemplo 1

Calcular el tanto efectivo de coste de un préstamo de 10.000 euros que se amortiza mediante una renta mensual, constante inmediata postpagable durante 2 años, siendo el tipo de interés inicial el 12% efectivo anual y nos cobran una comisión de apertura del 0,61%.

En primer lugar calculamos el pago mensual:

$$i_{12} = (1,12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00948879$$

$$10.000 = A \times A_{24, i_{ec} 12} \\ A = 467,88 \text{ €}$$

a continuación planteamos la ecuación de equilibrio:

CANTIDAD ENTREGADA:

Comisión de apertura: $10.000 \times 0,0061 = 61$

Cantidad entregada: $10.000 - 61 = 9.939$

CANTIDAD RECIBIDA:

$$467,88 \times A_{24, i_{ec} 12} \\ 9.939 = 467,88 \times A_{24, i_{ec} 12}$$

de donde, utilizando alguno de los métodos expuestos, el coste mensual $i_{ec(12)} = 0,01$. Pero nosotros queremos el coste efectivo anual:

$$i_{ec} = (1,01)^{12} - 1 = 0,126825 \\ i_{ec} = 12,68\%$$

9.2. La tasa anual equivalente (TAE)

La TAE es un concepto regulado por el Banco de España a través de la circular 8/90 de 7 de septiembre que tiene como objetivo buscar un **instrumento de medida homogéneo** para que el cliente de una entidad financiera pueda comparar entre distintas entidades (tanto productos de activo como de pasivo), eligiendo aquel producto que le sea más interesante.

Hemos visto que existen intereses efectivos anuales, efectivos k-esimales, tantos nominales, etc., pues bien, si a éstos les sumamos los efectos de las comisiones y otros gastos que surgen en las operaciones financieras, cualquier persona tendría bastantes problemas para elegir correctamente los productos de activo y pasivo que más le interesen, financieramente hablando.

A continuación reproducimos aquellas partes de la circular que más nos interesan (norma octava), para el cálculo de la TAE:

1. El tipo de interés, coste o rendimiento efectivo **deberán expresarse obligatoriamente** en los documentos contractuales a que se refiere el apartado 1 de la norma sexta de esta Circular (podríamos resumir ese apartado diciendo que esos documentos van a ser aquellos que surgen en las operaciones en las que intervengan pequeños ahorradores y/o inversores, ya que el objetivo de la TAE es protegerlos).
2. Para la confección y publicación del tipo de interés, coste o rendimiento efectivo a que se refiere el apartado anterior, las entidades deberán atenerse a las siguientes reglas, que se desarrollan matemáticamente mediante la fórmula contenida en el anexo V:

- a) Los tipos de interés, costes o rendimientos **se expresarán en tasas porcentuales anuales pagaderas a término vencido equivalentes**.
- b) **La tasa porcentual equivalente** es aquella que igual a en cualquier fecha el valor actual de los efectivos recibidos y entregados a lo largo de la operación, por todos los conceptos, incluido el saldo remanente a su término, con las excepciones e indicaciones que se recogen en los siguientes apartados.

Ejemplo 1

De un préstamo conocemos las siguientes características:

- a) Principal 240.000 euros a devolver en cuatro pagos anuales por el método de cuotas de amortización constantes, con un interés efectivo anual del 12%.
- b) Comisión de apertura: 1,2%
- c) Gastos de Estudio: 0,5%.
- d) Notario: 1%.
- e) Seguro obligatorio (invalidez, muerte, etc.): 0,5%.

Se pide:

1. Confeccionar el cuadro de amortización.
2. Calcular la TAE, tal como indica el Bando de España.
3. Calcular el Tanto Efectivo de Coste.

1. Confeccionar el cuadro de amortización.

CUADRO AMORTIZACIÓN PRÉSTAMO					
n	a _n	I _n	C _n	T _n	R _n
0	0,00	0,00	0,00	0,00	240.000,00
1	88.800,00	28.800,00	60.000,00	60.000,00	180.000,00
2	81.600,00	21.600,00	60.000,00	120.000,00	120.000,00
3	74.400,00	14.400,00	60.000,00	180.000,00	60.000,00
4	67.200,00	7.200,00	60.000,00	240.000,00	0,00
	312.000,00	72.000,00	240.000,00		

2. Calcular la TAE, tal como obliga a publicar el Banco de España.

Principal				240.000
Comisión Apertura	0,012 x 240.000	=		(2.880)
Gastos de Estudio	0,005 x 240.000	=		(1.200)
Seguro	0,005 x 240.000	=		(1.200)
RECIBE				234.720

No hemos incluido el gasto de notario, por ser un gasto de terceros.

A cambio ha de **ENTREGAR** cuatro pagos, durante los cuatro años siguientes (ver cuadro):

$$234.720 = 88.800 \frac{1}{(1+TAE)^1} + 81.600 \frac{1}{(1+TAE)^2} + 74.400 \frac{1}{(1+TAE)^3} + 67.200 \frac{1}{(1+TAE)^4}$$

Calculando con la función TIR de Excel: **TAE = 13,1171%**

3. Calcular su Tanto Efectivo de Coste.

Para calcular el coste real hemos de considerar todos los gastos, incluido los del notario (240.000 x 0,001 = 2.400) y, por tanto, la ecuación será:

$$234.720 - 2.400 = 88.800 \frac{1}{(1+i_{ec})^1} + 81.600 \frac{1}{(1+i_{ec})^2} + 74.400 \frac{1}{(1+i_{ec})^3} + 67.200 \frac{1}{(1+i_{ec})^4}$$

Calculando con la función TIR de Excel: $i_{ec} = 13,639894\%$

10. OPERACIONES DE ARRENDAMIENTO FINANCIERO (LEASING)

10.1. Introducción

El término leasing proviene del inglés “to lease”, que significa arrendar o dejar en arriendo. En España se traduce por arrendamiento financiero, aunque el término anglosajón es aceptado y utilizado internacionalmente.

El arrendamiento financiero es un contrato mercantil de cesión de uso en virtud del cual una empresa compra en nombre propio, siguiendo las instrucciones del futuro arrendatario, determinados bienes muebles o inmuebles para, como propietaria-arrendadora, alquilarlos al usuario-arrendatario que los utilizará por un tiempo irrevocable convenido, a cambio de un precio, distribuido en cuotas periódicas, que incluyen el coste del equipo más los intereses correspondientes, y un valor residual prefijado, similar a las cuotas anteriores. Al término del plazo convenido para la duración del contrato, el usuario tendrá la triple opción de:

1. **Cancelar** el arrendamiento, devolviendo el equipo a la entidad arrendadora.
2. **Renovación** del contrato y continuar utilizando el bien por un nuevo período.
3. Ejercer la opción de compra y **adquirir** el bien.

El leasing es una **forma de financiación** a la que acuden las empresas por diversas razones:

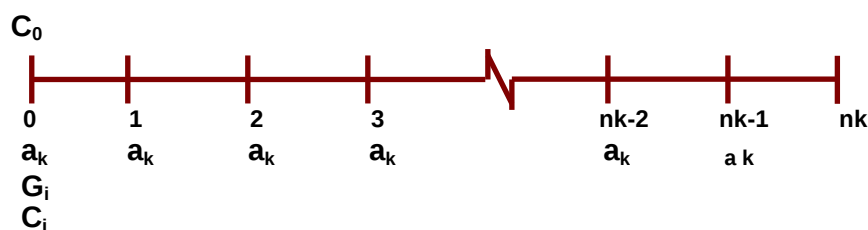
- a) Cuando obtienen una buena rentabilidad pero no les interesa inmovilizar su dinero.
- b) En aquellos casos en los que tienen escasez de recursos propios, o ya están muy endeudados.
- c) Cuando utilizan una tecnología que se queda obsoleta en un corto período de tiempo.
- d) Cuando su nivel de beneficios es alto y pueden aprovechar las ventajas fiscales que supone el leasing.

En general, a la empresa le interesa ejercitar la opción de compra ya que durante la vigencia del contrato la empresa conseguirá pagar el bien a través de cuotas periódicas, si bien su vida útil suele ser mucho mayor.

Nos centraremos aquí únicamente en los aspectos financieros del contrato. Para ello tendremos en cuenta los siguientes datos del contrato:

- **n**: número de años de duración del contrato.
- **C₀**: precio del equipo que se arrienda o valor al contado del mismo, será la cantidad a financiar.
- **VR**: Será el importe que tendrá que pagar el arrendatario para ejercer la opción de compra. Puede ser una cuota más o bien inferior al valor que tiene el bien en esos momentos.
- **a_k**: cuota periódica de alquiler. Generalmente suele ser prepagable.
- **C_i**: En ocasiones se suele entregar una cantidad o cuota inicial al formalizar el contrato.
- **k**: frecuencia de pago de los alquileres, normalmente mensuales y al principio de cada mes.
- **i**: tipo de interés o rendimiento que la entidad de leasing quiere obtener de su operación. Para el arrendatario será el coste financiero de la operación.
- **G_i**: gastos iniciales de la operación, como impuestos, comisión de apertura y de estudio de la operación, seguros, etc.

En general, y aunque la casuística puede ser muy variada, podemos representar gráficamente la operación de leasing:



La empresa de leasing suministrará un cuadro de pagos a lo largo de la vida de la operación y que básicamente es similar a los cuadros de amortización de préstamos estudiados, añadiéndoles una columna que recoja la cuota de IVA y otra para el pago total de la cuota periódica más el citado impuesto.

Su formato podría ser el siguiente:

Periodos nk	Pago Periódico a_k	Cuota de Interés I_h	Cuota de Amortización C_h	Total Amortizado T_h	Resto por amortizar R_h	IVA	Pago Total

Aunque la denominación o estructura puede ser distinta, por ejemplo:

Periodos	Cuota Total	Impuesto	Cuota Neta	Carga Financiera	Recuperación del coste del bien del periodo	Recuperación del coste del bien acumulado	Deuda Pendiente
nk	CT	IVA	a_k	l_h	C_h	T_h	R_h

10.2. Operación de leasing con cuotas prepagables y Valor Residual

De las múltiples posibilidades matemáticas en materia de arrendamiento financiero (pagos postpagables o prepagables, valor residual igual o distinto a una cuota neta, existencia o no de cuota inicial, a tanto de interés anticipado o vencido, etc.) nosotros vamos a desarrollar aquí únicamente, y a título de ejemplo, el supuesto de una operación de arrendamiento financiero, sin cuota inicial, cuotas prepagables, valor residual distinto a las cuotas y con pago de interés anticipado (lo que permite que el valor residual sea todo capital).

En primer lugar calcularemos el pago periódico a realizar:

$$C_0 = A_k \times A_{nk-1, ik} \times (1 + i_k) + \frac{VR}{(1 + i_k)^{nk-1}}$$

Una vez obtenida la cuota a pagar, para poder construir el cuadro de amortización necesitamos obtener el valor de C_1 :

$$C_1 = \frac{C}{S_{n,i}}$$

Ejemplo 1

Una empresa financia la compra de un vehículo, mediante un contrato de arrendamiento financiero con las siguientes características: coste al contado 49.000 euros, duración del contrato 5 años, los pagos son anuales, constantes y prepagables, con una opción de compra que asciende a 3.000 euros, el tipo de interés de la operación es del 10% anual y el IVA el 16%. Redactar el cuadro de amortización de forma que el valor residual sea sólo capital (interés anticipado).

$$49.000 = A \times A_{4, 0,10} \times (1,10) + \frac{3.000}{(1,10)^4}$$

$$A = 13.465,14 \text{ €}$$

$$C_1 = \frac{49.000 - 3.000}{S_{4; 0,10}} = 9.911,66$$

CUADRO AMORTIZACIÓN PRÉSTAMO							
Per.	Pago	Intereses	Amortización	total amort.	total pdte.	IVA	total pago
0	13.465,14	3.553,49	9.911,66	9.911,66	39.088,34	2.154,42	15.619,57
1	13.465,14	2.562,32	10.902,82	20.814,48	28.185,52	2.154,42	15.619,57
2	13.465,14	1.472,04	11.993,10	32.807,58	16.192,42	2.154,42	15.619,57
3	13.465,14	272,73	13.192,42	46.000,00	3.000,00	2.154,42	15.619,57
4	3.000,00	0,00	3.000,00	49.000,00	0,00	480,00	3.480,00
Σ	56.860,57	7.860,57	49.000,00			9.097,69	65.958,26