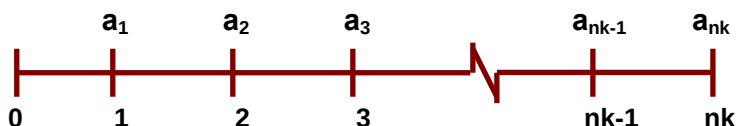


TEMA 7 RENTAS FRACCIONADAS

1. INTRODUCCIÓN

En la actividad normal de las entidades financieras es muy frecuente que la periodicidad con que se hacen efectivos los sucesivos términos no sean anuales, como hasta ahora hemos venido estudiando, produciéndose pagos y cobros mensuales, trimestrales, semestrales, etc., es decir, para periodos distintos al año.

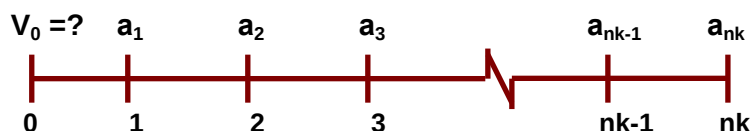
Una **renta fraccionada**, es una serie de capitales disponibles que se van produciendo en períodos inferiores al año. (mensualmente, trimestralmente, etc.)



2. RENTA FRACCIONADA, CONSTANTE, TEMPORAL, INMEDIATA POSTPAGABLE

2.1 Valor actual de una renta inmediata postpagable, en función del tanto fraccionado $V_0(k)$

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{nk-1}, a_{nk}$, los nominales de varios capitales, con vencimientos en $1, 2, 3, \dots, nk-1, nk$ periodos respectivamente y queremos calcular su valor actual, V_0 . Gráficamente:



Si todos los capitales son iguales $a_1 = a_2 = \dots = a_{nk} = A_k$ su valor actual, $V_0(k) = V_0$ será:

$$V_0 = A_k \frac{1}{(1+i_k)^1} + A_k \frac{1}{(1+i_k)^2} + A_k \frac{1}{(1+i_k)^3} + \dots + A_k \frac{1}{(1+i_k)^{nk-1}} + A_k \frac{1}{(1+i_k)^{nk}}$$

$$V_0(k) = A_k \times A_{nk : ik}$$

i_k = tanto fraccionado (mensual, trimestral etc.)
 A_k = Cantidad que se paga en el periodo fraccionado (Mensualidad, trimestralidad, etc.)
 nk = Número de periodos fraccionados (meses, trimestres, Etc.)

Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta inmediata postpagable de 4.000 euros trimestrales que vamos a recibir durante 3 años si se valorada al 3% de interés compuesto trimestral.

$$\begin{aligned} V_0(k) &= A_k \times A_{nk : ik} \\ V_0(k) &= 4.000 \times A_{12 : 0,03} \\ V_0(k) &= 4.000 \times 9,954004 \\ V_0(k) &= 39.816,02 \text{ €} \end{aligned}$$

2.2 Valor actual de una renta inmediata postpagable, en función del tanto anual i

En la expresión obtenida en el epígrafe anterior:

$$V_0(k) = A_k \times \frac{(1+i_k)^{nk} - 1}{(1+i_k)^{nk} \times i_k}$$

sabiendo que:

$$(1+i) = (1+i_k)^{nk}$$

$$i_k = \frac{J_k}{k}$$

y sustituyendo:

$$V_0(k) = A_k \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times \frac{J_k}{k}}$$

$$V_{0(k)} = A_k \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \times \frac{k}{J_k}$$

Si multiplicamos y dividimos por i y reordenamos:

$$V_{0(k)} = A_k \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \times \frac{k}{J_k} \times \frac{i}{i}$$

$$V_{0(k)} = A_k \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \times k \times \frac{i}{J_k}$$

nos queda:

$$V_0(k) = A_k \times A_{n:i} \times k \times \frac{i}{J_k}$$

Nota: en adelante $k \frac{i}{J_k} = \text{factor de fraccionada}$

Ejemplo:

Una institución educativa me ofrece en concepto de beca 500 euros al final de cada mes durante 2 años. ¿Qué capital equivalente a todas las mensualidades debería percibir hoy si la valoración se hace al 6% de interés compuesto anual?

$$(1,06) = (1 + i_{12})^{12}$$

$$i_{12} = 0,004867551$$

$$J_{12} = i_{12} \times 12$$

$$J_{12} = 0,058410606$$

$$V_0(k) = A_k \times A_{n:i} \times k \times \frac{i}{J_k}$$

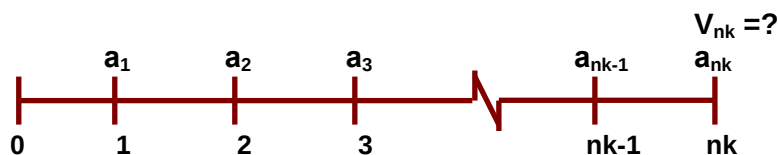
$$V_0(k) = 500 \times A_{2;0,06} \times 12 \times \frac{0,06}{0,058410606}$$

$$V_0(k) = 500 \times 1,8333923 \times 12 \times 1,0272107$$

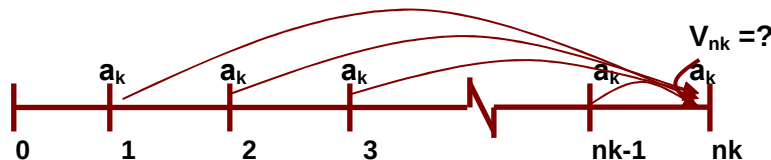
$$V_0(k) = 11.299,68 \text{ €}$$

2.3 Valor final de una renta inmediata postpagable, en función del tanto fraccionado i_k ($V_n(k)$)

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{nk-1}, a_{nk}$, los nominales de varios capitales, con vencimientos en $1, 2, 3, \dots, nk-1, nk$ periodos respectivamente y queremos calcular su valor final, V_{nk} . Gráficamente:



Si todos los capitales son iguales $a_1 = a_2 = \dots = a_{nk} = a_k$, su valor final, $V_f(k) = V_{nk}$ será:



y su expresión financiera:

$$V_n(k) = A_k (1 + i_k)^{nk-1} + A_k (1 + i_k)^{nk-2} + A_k (1 + i_k)^{nk-3} + \dots + A_k (1 + i_k)^1 + A_k (1 + i_k)^0$$

$$V_n(k) = A_k \frac{(1 + i_k)^{nk} - 1}{i_k}$$

$$V_n(k) = A_k \times S_{nk:i_k}$$

2.4 Valor final de una renta inmediata postpagable, en función del tanto anual i

Si partimos del valor final para el caso de una renta anual a tanto de interés anual:

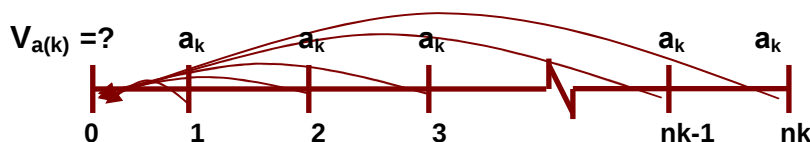
$$V_n = A \times S_{n:i}$$

Y la multiplicamos por el factor de fraccionada $k \frac{i}{j_k}$:

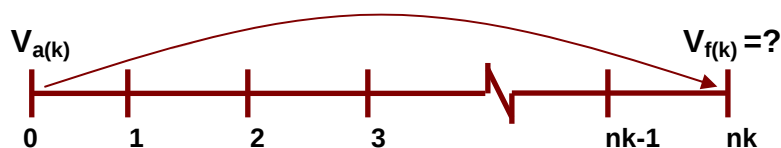
$$V_n(k) = A_k \times S_{n:i} \times k \times \frac{i}{j_k}$$

2.5 Cálculo del Valor final ($V_n(k)$) a partir del Valor actual ($V_o(k)$)

Sea $V_{a(k)}$ el valor actual de varios capitales $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{nk-1}, a_{nk}$, con vencimientos en $1, 2, 3, \dots, nk-1, nk$ periodos, respectivamente. Si todos los capitales son iguales $a_1 = a_2 = \dots = a_{nk} = a_k$ y calculamos su valor actual con: $V_{a(k)} = A \times A_{nk:i_k}$. Gráficamente:



para obtener el $V_{f(k)}$, bastará con capitalizar $V_{a(k)}$ hasta el momento nk :



Es decir:

$$V_n(k) = V_o(k) (1 + i_k)^{nk}$$

Nota: en adelante $(1+i_k)^{nk}$ = factor de valor final para rentas fraccionadas

También podríamos multiplicar el $V_o(k)$ por el factor de valor final $(1+i)^n$:

$$V_n(k) = V_o(k) (1 + i)^n$$

Nota: Todo lo anterior, nos lleva a reflexionar y poder determinar que los factores de:

valor final	$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk}$
prepagable	$(1+i) \rightarrow (1+i_k)$
diferida	$V^d = V_k^{dk}$
anticipada	$(1+i)^h = (1+i_k)^{hk}$

serán los mismos que obtuvimos para rentas anuales, pero adaptándolos a rentas fraccionadas, según los casos. Por ello en el resto de epígrafes nos limitaremos a aplicar dichos factores a la renta en cuestión.

3. RENTAS FRACCIONADA, VARIABLE EN PROGRESIÓN GEOMETRICA, TEMPORAL, INMEDIATA POSTPAGABLE

3.1 Valor actual de una renta inmediata postpagable en función del tanto fraccionado i_k ($V_a(k, p.g.)$)

Tomando la expresión, obtenida en el tema anterior, para rentas anuales variables en progresión geométrica:

$$V_{o(p.g.)} = (A_1 \times \frac{1 - q^n \times V^n}{1 + i - q})$$

y aplicándole los criterios desarrollados en los epígrafes anteriores obtendríamos:

$V_{o(k, p.g.)} = a_1 \left[\frac{1 - q_k^{nk} V_k^{nk}}{1 + i_k - q_k} \right]$	A_1 = Cantidad primer término q_k = razón correspondiente al periodo fraccionado (mes, trimestre, etc.) $V_k = (1 + i_k)^{-1}$ i_k = tanto fraccionado n_k = número de periodos fraccionados
---	--

expresión que sería válida para el caso en el que la **razón de la progresión varia de forma k-esimal**, es decir, cada periodo.

Ejemplo 1:

Calcular el valor de cada término de una renta inmediata postpagable trimestral durante 10 años, si se valora al 8% de interés efectivo anual, los pagos crecen trimestralmente a razón del 3% y su valor actual es de 10.000 euros.

$$(1,08) = (1 + i_4)^4$$

$$i_4 = 0,019426547$$

$$10.000 = A_1 \times \frac{1 - (1,03)^{40} \times \frac{1}{(1,019426547)^{40}}}{1,019426547 - 1,03}$$

$$A_1 = 206,94 \text{ €}$$

Solución:	Primer año: $A_1 = 206,94 \text{ €}$; $A_2 = 213,14 \text{ €}$; $A_3 = 219,54 \text{ €}$; $A_4 = 226,12 \text{ €}$
	Segundo año: $A_5 = 232,91 \text{ €}$; $A_6 = 239,89 \text{ €}$; $A_7 = 247,09 \text{ €}$; $A_8 = 254,50 \text{ €}$

3.2 Valor actual de una renta inmediata postpagable en función del tanto fraccionado i ($V_a(k, g)$) La razón varia anualmente q

En el apartado anterior hemos considerado que la razón de la progresión varia de forma k-esimal, pero suele ocurrir, en la mayoría de los casos, que la renta varia de forma anual, siendo iguales todos los pagos fraccionados dentro del mismo año.

Si partimos de:

$$V_{o(p.g.)} = (A_1 \times \frac{1 - q^n \times V^n}{1 + i - q})$$

teniendo en cuenta que la progresión varia anualmente, para transformarla en fraccionada bastará con aplicarle a la expresión anterior el factor de conversión de renta anual en fraccionada $k \frac{i}{j_k}$:

$$V_{o(k, p.g.)} = (A_1 \times \frac{1 - q^n \times V^n}{1 + i - q} \times k \times \frac{i}{j_k})$$

Obsérvese como la renta **crece anualmente a razón de q** , pero los pagos son k-esimales, es decir, en cada periodo anual los pagos k-esimales son iguales.

Ejemplo:

Calcular el valor de cada término de una renta inmediata postpagable trimestral durante 10 años, si se valora al 8% de interés efectivo anual, los pagos crecen anualmente a razón del 3% y su valor actual es de 10.000 euros.

$$(1,08) = (1 + i_4)^4$$

$$i_4 = 0,019426547$$

$$j_4 = i_4 \times 4$$

$$j_4 = 4 \times 0,019426547$$

$$j_4 = 0,077706187$$

$$10.000 = (A_1 \times \frac{1 - 1,03^3 \times (1,08)^{-10}}{1,08 - 1,03} \times 4 \times \frac{0,08}{0,077706187})$$

$$A_1 = 321,63 \text{ €}$$

4. RENTAS FRACCIONADA, VARIABLE EN PROGRESIÓN ARITMETICA, TEMPORAL, INMEDIATA POSTPAGABLE

4.1. Valor actual de una renta inmediata postpagable en función del tanto fraccionado i_k $V_o(k, p.a.)$

Tomando la expresión, obtenida en el tema anterior, para rentas anuales variables en progresión aritmética:

$$V_o(p.a.) = A_1 \times A_{n,i} + \frac{q}{i} (A_{n,i} - n \times V_n)$$

y aplicándole los criterios desarrollados en los epígrafes anteriores obtendríamos:

$$V_o(k, p.a.) = A_1 \times A_{nk, ik} + \frac{q_k}{i_k} (A_{nk, ik} - nk \times V^{nk})$$

expresión que sería válida para el caso en el que la razón de la progresión varia de forma k-esimal, es decir, cada periodo.

Ejemplo:

Calcular el valor de cada término de una renta inmediata postpagable trimestral durante 4 años, si se valora al 8% de interés efectivo anual, los pagos crecen trimestralmente a razón de 30 euros y su valor actual es de 10.000 euros.

$$(1,08) = (1 + i_4)^4$$

$$i_4 = 0,019426547$$

$$10.000 = (A_1 \times A_{16 : 0,019426547}) + \frac{30}{0,019426547} (A_{16 : 0,019426547} - 16 \times \frac{1}{(1,019426547)^{16}})$$

$$a_1 = 520,41 \text{ €}$$

(Solución: Primer año $a_1 = 520,41$, $a_2 = 550,41$, $a_3 = 580,41$, $a_4 = 610,41$ €),

(Solución: Segundo año $a_5 = 640,41$, $a_6 = 670,41$, $a_7 = 700,41$, $a_8 = 730,41$ €), etc.

4.2 Valor actual de una renta inmediata postpagable en función del tanto i

En el apartado anterior hemos considerado que la razón de la progresión varia de forma k-esimal, pero puede ocurrir, que la renta varie de forma anual, siendo iguales todos los pagos fraccionados dentro del mismo año.

Si partimos de:

$$V_o(p.a.) = A_1 \times A_{n,i} + \frac{q}{i} (A_{n,i} - n \times V_n)$$

y teniendo en cuenta que la progresión varia anualmente, para transformarla en fraccionada bastará con aplicarle a la expresión anterior el factor de conversión de renta anual en fraccionada:

$$K \times \frac{i}{j_k}$$

$$V^o(p.a.) = (A_1 \times A_{n,i} + \frac{q}{i} (A_{n,i} - n \times V_n)) \times k \times \frac{i}{j_k}$$

Obsérvese como la renta crece anualmente a razón de q, pero los pagos son k-esimales, es decir, en cada periodo anual los pagos k-esimales son iguales.

Ejemplo:

Calcular el valor de cada término de una renta inmediata postpagable trimestral durante 4 años, si se valora al 8% de interés efectivo anual, los pagos crecen anualmente a razón de 120 euros y su valor actual es de 10.000 euros.

$$(1,08) = (1 + i_4)^4$$

$$i_4 = 0,019426547$$

$$j_k = i_k \times k$$

$$j_4 = 0,019426547 \times 4$$

$$j_4 = 0,0777061876$$

$$V_o(p.a.) = (A_1 \times A_{n,i} + \frac{q}{i} (A_{n,i} - n \times V_n)) \times k \times \frac{i}{j_k}$$

$$10.000 = (A_1 \times A_{4 : 0,08} + \frac{120}{0,08} (A_{4 : 0,08} - 4 \times V_4)) \times 4 \times \frac{0,08}{0,0777061876}$$

$$A_1 = 564,68 \text{ €}$$