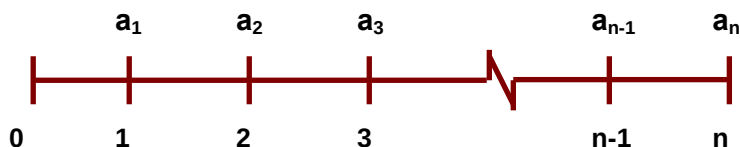


TEMA 6: RENTAS VARIABLES

1. RENTAS VARIABLES EN GENERAL

Son aquellas rentas en las que **los términos no son constantes**, su valor actual y final se calculan a partir del principio de equivalencia financiera, actualizando (valor actual) o capitalizando (valor final), término a término y sumando sus resultados en el momento de la valoración.

Son rentas similares, en sus características, a las anteriores, en las que los términos de la renta varían sin guardar relación alguna entre sí y, por tanto, no podremos obtener una expresión financiera reducida que pudiera simplificar los cálculos. Gráficamente lo podemos representar:



Y su expresión financiera:

$$V_0 = A_1 \frac{1}{(1+i)^1} + A_2 \frac{1}{(1+i)^2} + A_3 \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + A_{n-1} \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + A_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta cuyos términos son 100, 350, 100 y 50 euros con vencimientos dentro de 1, 2, 3, y 4 años respectivamente, si se valora al 4% de interés compuesto anual.

$$V_0 = 100 \frac{1}{(1,04)^1} + 350 \frac{1}{(1,04)^2} + 100 \frac{1}{(1,04)^3} + 50 \frac{1}{(1,04)^4}$$

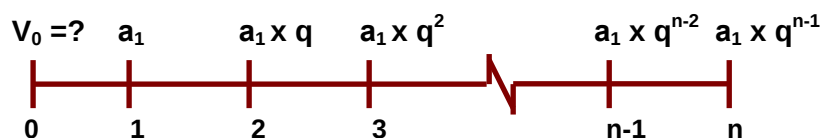
$$V_0 = 551,39 \text{ €}$$

2. RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

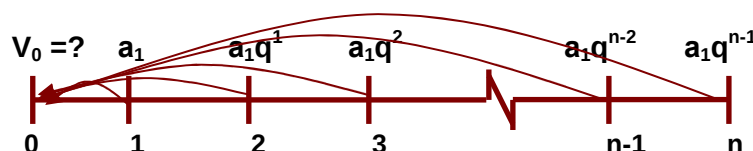
Son rentas variables, con la particularidad de que sus **términos varían en forma de progresión geométrica de razón $q > 0$** .

2.1 VALOR ACTUAL DE UNA RENTA INMEDIATA POSTPAGABLE (V_0 (P.G.))

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, los nominales de varios capitales, con vencimientos en 1, 2, 3, ..., n-1, n años respectivamente y queremos calcular su valor actual, V_0 . Gráficamente:



De donde, su $V_a(g) = V_0$ será:



y su expresión financiera:

$$V_0(p.g.) = A_1 q^0 V^1 + A_1 q^1 V^2 + A_1 q^2 V^3 + \dots + A_1 q^{n-2} V^{n-1} + a_1 q^{n-1} V^n$$

Si sacamos factor común de $a_1 V$ nos quedará:

$$V_0(p.g.) = A_1 V^1 (1 + q^1 V^1 + q^2 V^2 + \dots + q^{n-2} V^{n-2} + q^{n-1} V^{n-1})$$

Si observamos los términos del corchete, tenemos la suma de una serie en progresión geométrica de razón qV .

Prog. Geom.	$\frac{A_1 - A_n \times r}{1 - r}$
-------------	------------------------------------

Por tanto:

$$V_0(p.g.) = A_1 V^1 \frac{1 - q^{n-1} V^{n-1} \times qV}{1 - qV}$$

$$V_0(p.g.) = A_1 V^1 \frac{1 - q^n V^n}{1 - qV}$$

si multiplicamos y dividimos por $(1+i)$, nos quedará:

$V_0(p.g.)$	$= a_1 \times \frac{1 - q^n \times V^n}{1 + i - q}$
-------------	---

⇒ **Caso particular 1: $q = (1+i)$**

$V_0(p.g.) = A_1 \times V^1 \times n$

⇒ **Caso particular 2: $q = 1$**

$V_0(p.g.) = A \times A_{n,i}$

Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta inmediata postpagable de 10 términos, sabiendo que la cuantía del primero es de 50.000 euros y que varía a razón del 4% anual acumulativo, si:

- Se valora al 6% de interés anual compuesto.
- Se valora al 4% de interés anual compuesto.
- Se valora al 4% de interés anual compuesto y $q = 1$.

a) Al 6% anual compuesto

$$V_0(p.g.) = 50.000 \times \frac{1 - (1,04)^{10}}{1 + 0,06 - 1,04} \times \frac{1}{(1,06)^{10}}$$

$$V_0(p.g.) = 50.000 \times \frac{1 - 1,480244}{0,02} \times \frac{1}{1,790848}$$

$$V_0(p.g.) = 50.000 \times \frac{0,1734396}{0,02}$$

$$V_0(p.g.) = 433.599 \text{ €}$$

b) Al 4% anual compuesto

$$V_0(p.g.) = 50.000 \times \frac{1}{(1,04)} \times 10$$

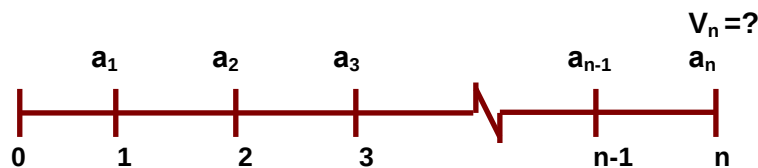
$$V_0(p.g.) = 480.769,23 \text{ €}$$

c) Se valora al 4% anual compuesto y $q = 1$.

$$\begin{aligned} V_0(p.g.) &= A \times A_{n,i} \\ V_0(p.g.) &= 50.000 \times A_{10;0,04} \\ V_0(p.g.) &= 50.000 \times 8,110896 \\ V_0(p.g.) &= 405.544,79 \text{ €} \end{aligned}$$

2.2 VALOR FINAL DE UNA RENTA INMEDIATA POSTPAGABLE ($V_n(p.g.)$)

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, los nominales de varios capitales, con vencimientos en 1, 2, 3, ..., $n-1, n$ años respectivamente y queremos calcular su valor final, V_n . Gráficamente:



$$V_n(p.g.) = A_1 \times \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$$

Para los casos particulares:

⇒ Caso particular 1: $q = (1+i)$

$$V_n(p.g.) = A_1 \times n \times (1+i)^n$$

$$V_n(p.g.) = A_1 \times n \times (1+i)^{n-1}$$

⇒ Caso particular 2: $q = 1$

$$V_n(p.g.) = A \times A_{n,i} \times (1+i)^n$$

$$V_n(p.g.) = A \times S_{n,i}$$

2.3. RENTA EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA PERPETUA

⇒ Valor actual de una renta perpetua inmediata postpagable ($P_0(p.g.)$)

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots$, los nominales de infinitos capitales, con vencimientos en 1, 2, 3, ..., años respectivamente y queremos calcular su valor actual, P_0 . Gráficamente:

$$P_0(p.g.) = a_1 \times \frac{1}{1+i-q}$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta anual perpetua inmediata postpagable, siendo su primer término 10.000 euros, la razón 1,04 y el tanto de valoración el 8% de interés compuesto anual

$$P_0(p.g.) = 10.000 \times \frac{1}{1,08 - 1,04}$$

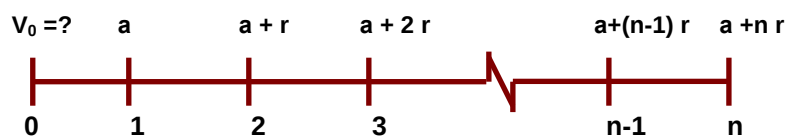
$$P_0(p.g.) = 250.000 \text{ €}$$

3. RENTA ANUAL, VARIABLE EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA, TEMPORAL, INMEDIATA POSTPAGABLE

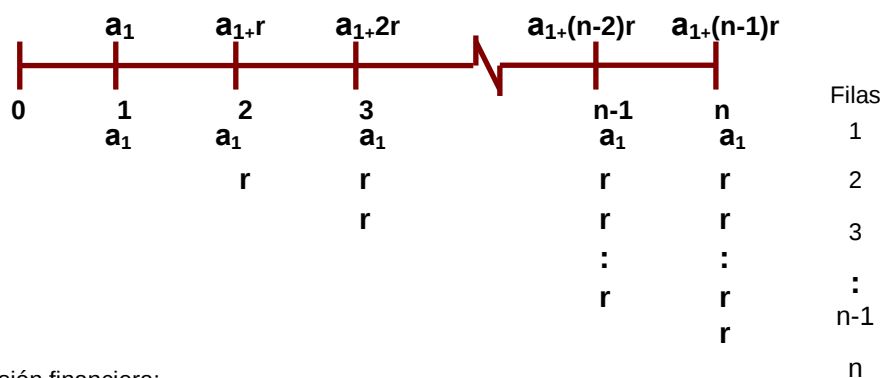
Son rentas variables, con la particularidad de que sus **términos varían en forma de progresión aritmética de razón r** .

3.1. VALOR ACTUAL DE UNA RENTA INMEDIATA POSTPAGABLE ($V_0(p.a.)$)

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, los nominales de varios capitales, con vencimientos en **1, 2, 3, ..., n-1, n** años respectivamente y queremos calcular su valor actual, V_0 . Gráficamente:



Que también podemos representar y descomponer de esta otra forma:



y su expresión financiera:

$$V_0(p.a.) = A_1 \times A_{n,i} + r \times A_{n-1,i} \times V^1 + r \times A_{n-2,i} \times V^2 + \dots + r \times A_{2,i} \times V^{n-2} + r \times A_{1,i} \times V^{n-1}$$

Si sacamos factor común de r y sustituimos los factores $A_{n,i}$ por su expresión:

$$V_0(p.a.) = (A_1 \times A_{n,i}) + r \left(\frac{1-V^{n-1}}{i} \times V + \frac{1-V^{n-2}}{i} \times V^2 + \dots + \frac{1-V^2}{i} \times V^{n-2} + \frac{1-V^1}{i} \times V^{n-1} \right)$$

Si efectuamos los productos:

$$V_0(p.a.) = (A_1 \times A_{n,i}) + r \left(\frac{V-V^n}{i} + \frac{V^2-V^n}{i} + \dots + \frac{V^{n-2}-V^n}{i} + \frac{V^{n-1}-V^n}{i} \right)$$

Sacando factor común de i :

$$V_0(p.a.) = (A_1 \times A_{n,i}) + \frac{r}{i} (V - V^n + V^2 - V^n + \dots + V^{n-2} - V^n + V^{n-1} - V^n)$$

Si, dentro del corchete, sumamos y restamos V^n , nos queda:

$$V_0(p.a.) = (A_1 \times A_{n,i}) + \frac{r}{i} (V - V^n + V^2 - V^n + \dots + V^{n-2} - V^n + V^{n-1} - V^n + V^n - V^n)$$

y ordenando sus términos:

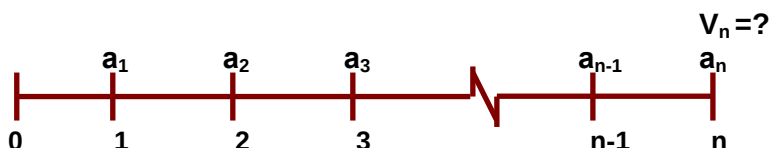
$$V_0(p.a.) = (A_1 \times A_{n,i}) + \frac{r}{i} (V + V^2 + \dots + V^{n-1} + V^n - n V^n)$$

donde, la primera parte del corchete sabemos que es $A_{n,i}$ y por tanto, nos quedará:

$$V_0 (p.a.) = a_1 \times A_{n,i} + \frac{q}{i} \times (A_{n,i} - n \times V^n)$$

3.2. VALOR FINAL DE UNA RENTA INMEDIATA POSTPAGABLE (V_0 (p.a.))

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, los nominales de varios capitales, con vencimientos en **1, 2, 3, ..., n-1, n** años respectivamente y queremos calcular su valor final, V_n . Gráficamente:



$$V_n (p.a.) = a_1 \times S_{n,i} + \frac{q}{i} \times (S_{n,i} - n)$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual y final de una renta postpagable, variable en progresión aritmética, cuyo primer término es de 100 euros, la razón de la progresión 20 euros, se valora al 8% de interés anual y tiene una duración de 10 años.

a) Valor actual:

$$V_0 (p.a.) = a_1 \times A_{n,i} + \frac{q}{i} \times (A_{n,i} - n \times V^n)$$

$$V_0 (p.a.) = 100 \times A_{10:0,08} + \frac{20}{0,08} \times (A_{10:0,08} - 10 \times \frac{1}{(1,08)^{10}})$$

$$V_0 (p.g.) = 100 \times 6,710081 + 250 \times (6,710081 - 10 \times 0,463193)$$

$$V_0 (p.g.) = 671,01 + 519,54$$

$$V_0 (p.g.) = 1.190,55 \text{ €}$$

b) Valor Final:

$$V_n (p.a.) = a_1 \times S_{n,i} + \frac{q}{i} \times (S_{n,i} - n)$$

$$V_n (p.a.) = 100 \times S_{10:0,08} + \frac{20}{0,08} \times (S_{10:0,08} - 10)$$

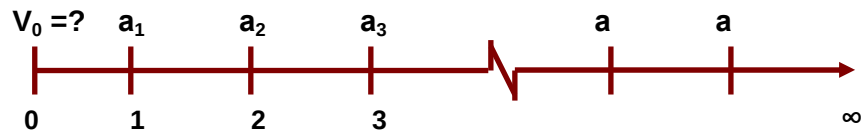
$$V_n (p.a.) = 100 \times 14,486562 + 250 \times (14,486562 - 10)$$

$$V_n (p.g.) = 1.448,66 + 1.121,64$$

$$V_n (p.g.) = 2.570,30 \text{ €}$$

3.3 RENTA EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA PERPETUA

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots$, los nominales de infinitos capitales, con vencimientos en **1, 2, 3, ...,** años respectivamente y queremos calcular su valor actual, V_0 . Gráficamente:



$$P_o \text{ (p.a.)} = \frac{1}{i} \times \left(a_1 + \frac{q}{i} \right)$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta anual perpetua postpagable variable en progresión aritmética, si el primer término asciende a 500 euros, su razón es 30 euros, y el tanto de valoración el 3% de interés compuesto anual. ¿Y si la renta es prepagable?

a) Postpagable:

$$P_o \text{ (p.a.)} = \frac{1}{i} \times \left(a_1 + \frac{q}{i} \right)$$

$$P_o \text{ (p.a.)} = \frac{1}{0,03} \times \left(500 + \frac{30}{0,03} \right)$$

$$P_o \text{ (p.a.)} = 33,33333 \times 1.500$$

$$P_o \text{ (p.a.)} = 50.000 \text{ €}$$

b) Prepagable:

$$P_o \text{ (p.a.)} = \frac{1}{i} \times \left(a_1 + \frac{q}{i} \right) \times (1+i)$$

$$P'o \text{ (p.a.)} = 50.000 \times 1,03$$

$$P' o \text{ (p.a.)} = 51.500 \text{ €}$$