

TEMA 5: RENTAS

1. INTRODUCCIÓN

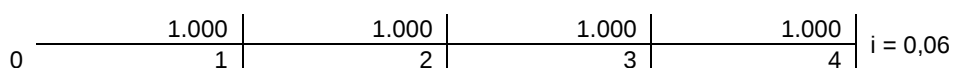
Llamamos renta a una *sucesión de capitales* que se hacen efectivos en vencimientos periódicos. Ejemplo: alquiler, salarios, préstamos, etc.

A cada uno de estos capitales se le denominan **términos** o anualidades (**A**).

Llamamos **duración** al número de términos que lo componen (**n**).

Llamamos **vencimiento** al momento en el que se hace efectivo el capital durante el periodo. Puede ser al principio como el caso de los alquileres o al final como el de los sueldos.

Ejemplo: Una persona ingresa 1.000 € anuales al final de los próximos 4 años en una entidad que le paga el 6 % de interés anual.



Términos (A): 1.000 €

Duración (n) = 4 años

Tanto de interés (i) = 0,06 anual

• CLASES DE RENTA

1. Rentas constantes y rentas variables.

- Rentas constantes: los términos son todos de la misma cuantía.
- Rentas variables: los términos cambian sus importes. Puede ser variabilidad conocida, en progresión aritmética o geométrica o de variabilidad no conocida.

2. Rentas fraccionadas o rentas no fraccionadas.

- Rentas fraccionadas: transcurren menos de un año del vencimiento un término a otro.
 - Rentas no fraccionadas: Entre término y término transcurre un año.
- #### 3. Rentas pospagables o por vencido y rentas prepagables o por anticipado.
- Rentas pospagables: los vencimientos de los pagos son al final de cada periodo.
 - Rentas prepagables: los vencimientos de los pagos son al principio de cada periodo.

4. Rentas inmediatas, rentas diferidas y rentas anticipadas.

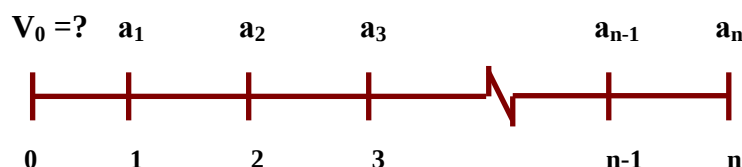
- Rentas inmediatas: el primer pago se realiza en el momento en el que se pacta la operación.
- Rentas diferidas: el primer pago se realiza al cabo de varios años desde que se pactó la operación
- Rentas anticipadas: El vencimiento se produce en un momento posterior al pago del último término.

5. Rentas temporales y perpetuas.

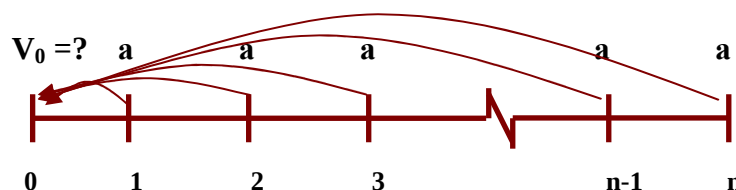
- Rentas temporales: tienen un número finito de términos.
- Rentas perpetuas: tienen un número infinito de términos.

2. RENTAS TEMPORALES, CONSTANTES, INMEDIATAS, VENCIDAS, NO FRACCIONADAS

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, los nominales de varios capitales, con vencimientos en 1, 2, 3, ..., n-1, n años respectivamente y queremos calcular su valor actual, V_0 . Gráficamente:



VALOR ACTUAL



$$V_a = V_0 = a \frac{1}{(1+i)^1} + a \frac{1}{(1+i)^2} + a \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + a \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + a \frac{1}{(1+i)^n}$$

sacamos factor común de a:

$$V_a = V_0 = a \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Si observamos los términos del corchete, tenemos la suma de una serie en progresión geométrica¹ de razón $\frac{1}{(1+i)}$. Por tanto:

$$V_a = a \left[\frac{\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)^n} \times \frac{1}{(1+i)}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \right]$$

Si multiplicamos numerador y denominador (1+i):

$$V_a = a \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{(1+i) - 1} \right]$$

$$V_a = a \frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{1 + i - 1}$$

$$V_a = a \frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$V_a = a \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$V_0 = a \times a_{n,i}$$

$$a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

En las operaciones de financiación el VALOR ACTUAL es el IMPORTE DEL PRÉSTAMO, y las cantidades que tenemos que pagar periódicamente para su devolución serían sus TÉRMINOS.

¹ Sabemos que $S_g = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$

En las operaciones de inversión el VALOR ACTUAL sería el importe que INGRESAMOS en el banco, para poder recibir unas cantidades periódicamente.

Ejemplos:

1. Calcular el valor actual de una renta de 2.000 € anuales, durante 6 años, utilizando un tanto de interés del 10 %.

$A = 2.000$ $n = 6 \text{ años}$ $i = 0,10$	$a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$
	$a_{6,0,10} = \frac{(1,10)^6 - 1}{(1,10)^6 \times 0,10} = 4,355261$
	$V_0 = a \times a_{6,0,10}$ $V_0 = 2.000 \times 4,355261$ $V_0 = 8.710,52 \text{ €}$

2. Una persona solicita un préstamo de 20.000 € que debe devolver mediante el pago de 5 anualidades constantes y por vencido. Calcular la cuantía de cada anualidad utilizando un tipo de interés del 12 %.

$V_0 = 20.000$ $n = 5 \text{ años}$ $i = 0,12$	$A_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$
	$A_{5,0,12} = \frac{(1,12)^5 - 1}{(1,12)^5 \times 0,12} = 3,604776$
	$V_0 = a \times a_{5,0,12}$ $20.000 = V_0 \times 3,604776$ $V_0 = 20.000 / 3,604776$ $V_0 = 5.548,19 \text{ €}$

3. Para devolver un préstamo de 30.000 € debemos pagar anualmente por vencido la cantidad de 3.698,73 €. Calcular durante cuántos años debemos pagar esta cantidad si el tipo de interés es del 4 %.

$V_0 = 30.000$ $A = 3.698,73$ $i = 0,04$ $n = x$	$V_0 = a \times a_{n,i}$ $30.000 = 3.698,73 \times a_{n,0,04}$ $a_{n,0,04} = 30.000 / 3.698,73$ $a_{n,0,04} = 8,110892$
	$a_{n,0,04} = \frac{(1,04)^n - 1}{(1,04)^n \times 0,04} = 8,110892$
	$(1,04)^n - 1 = 8,110892 \times (1,04)^n \times 0,04$ $(1,04)^n - 1 = 0,324436 \times (1,04)^n$ $(1,04)^n - 0,324436 \times (1,04)^n = 1$ $(1 - 0,324436) \times (1,04)^n = 1$ $0,675564 \times (1,04)^n = 1$ $(1,04)^n = 1 / 0,675564$ $(1,04)^n = 1,480245$ $n \times \log 1,04 = \log 1,480245$ $n \times 0,017033 = 0,170334$ $n = 0,170333 / 0,0170334$ $n = 10 \text{ años}$

4. Calcular el tanto de interés compuesto anual al que nos han prestado 100.000 euros, si hemos de amortizarlo mediante 5 anualidades, inmediatas postpagables de 24.389,07 euros.

$$V_a = A \times A_{n,i}$$

$$100.000 = 24.389,07 \times A_{5,i}$$

$$4,100197 = \frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 \times i}$$

Por aproximaciones sucesivas:

$$i = 10\%$$

$$A_{5,0,10} = 3,7907$$

$$i = 5\%$$

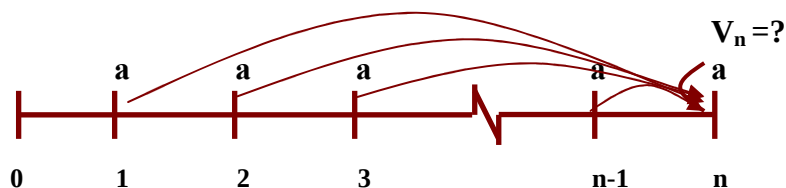
$$A_{5,0,05} = 4,3294$$

$$i = 7\%$$

$$A_{5,0,07} = 4,100197$$

VALOR FINAL

Se utiliza cuando una persona desea acumular un capital y quiere saber que cantidad recibiría al final de la operación. Si todos los capitales son iguales $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, su valor final, $V_f = V_n$ será: y su expresión financiera:



$$V_f = V_n = a (1+i)^{n-1} + a (1+i)^{n-2} + a (1+i)^{n-3} + \dots + a (1+i)^1 + a (1+i)^0$$

sacamos factor común de a :

$$V_f = V_n = a \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i)^1 + 1 \right]$$

Si observamos los términos del corchete, tenemos la suma de una serie en progresión geométrica ² de razón $\frac{1}{(1+i)}$. Por tanto:

$$V_n = a \left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1 \times \frac{1}{(1+i)}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \right]$$

Si multiplicamos numerador y denominador $(1+i)$:

$$V_n = a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \right]$$

operando el denominador:

$$V_n = a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$V_n = a \times S_{n,i}$$

$$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ejemplos:

² Sabemos que $S_g = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$

1. Un empleado al que faltan 15 años para jubilarse desea acumular un capital de 24.000 €, mediante entrega de cantidades al final de cada año. Calcular la cuantía de las anualidades si valoramos la operación con un tanto de interés del 8 %.

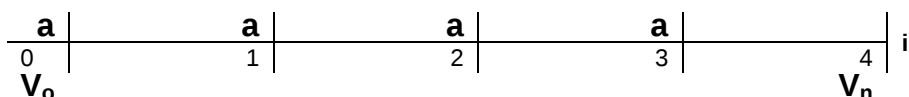
$V_n = 24.000$ $n = 15$ años $i = 0,08$ $A = x$	$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	$S_{15,0,08} = \frac{(1,08)^{15} - 1}{0,08} = 27,152114$
	$V_n = A \times S_{15,0,08}$ $24.000 = A \times 27,152114$ $A = 24.000 / 27,152114$
	$A = 883,91 \text{ €}$

2. Una persona quiere conseguir tener un capital de 53.740,75 € mediante la entrega de 2.000 € anuales por vencido en un banco que ofrece un tanto de interés del 3 %. Calcular durante cuántos años deberá realizar estos ingresos.

$V_n = 53.740,75$ $A = 2.000 \text{ €}$ $i = 0,03$ $n = x$	$V_n = A \times S_{n,i}$ $53.740,75 = 2.000 \times S_{n,0,03}$ $S_{n,0,03} = 53.740,75 / 2.000$ $S_{n,0,03} = 26,870375$
	$S_{n,0,03} = \frac{(1,03)^n - 1}{0,03} = 26,870375$ $(1,03)^n - 1 = 26,870375 \times 0,03$ $(1,03)^n - 1 = 0,806111$ $(1,03)^n = 0,806111 + 1$ $(1,03)^n = 1,806111$ $n \times \log 1,03 = \log 1,806111$ $n \times 0,012837 = 0,256744$ $n = 0,256744 / 0,012837$ $n = 20 \text{ años}$

3. RENTAS CONSTANTES, INMEDIATAS, NO FRACCIONADAS, TEMPORALES Y PREPAGABLES

Las anualidades se reciben al principio de cada periodo.



3.1 VALOR ACTUAL

$$V_0 = a \times a_{n,i} \times (1+i)$$

Ejemplos:

1. ¿Cuál será la cantidad que tendremos que depositar en un banco que ofrece el 3,5 % de interés anual, si queremos recibir al comienzo de cada uno de los próximos 8 años una renta de 8.000 €?

$A = 8.000$ $n = 8$ años $i = 0,035$	$A_{8,0,035} = \frac{(1,035)^8 - 1}{(1,035)^8 \times 0,035} = 6,873956$
	$V_0 = A \times A_{8,0,035} \times (1+i)$ $V_0 = 8.000 \times 6,873956 \times (1,035)$ $V_0 = 56.916,36 \text{ €}$

VALOR FINAL

$$V_0 = A \times S_{n,i} \times (1+i)$$

Ejemplos:

1. Calcula el valor final de una renta prepagable, constate e inmediata de 30.000 € anuales sabiendo que la operación financiera dura 5 años y el tipo de interés es del 4 %.

$A = 30.000$ $n = 5$ años $i = 0,04$	$S_{5, 0,04} = \frac{(1,04)^5 - 1}{0,04} = 5,416323$
	$V_n = A \times S_{5, 0,04} \times (1 + i)$ $V_n = 30.000 \times 5,416323 \times (1,04)$ $V_n = 168.989,26 \text{ €}$

4. RENTAS CONSTANTES, NO FRACCIONADAS, TEMPORALES, VENCIDAS Y DIFERIDAS

	PERIODO DE CARENCIA		A	A	A	i
0 V_0	1	2	3	4	5 V_n	

4.1 VALOR ACTUAL

$$d/V_0 = A \times A_{n, i} \times (1 + i)^{-d}$$

Ejemplo:

1. Para comprar un coche cuyo valor al contado es de 20.000 €, nos ofrecen no pagar ninguna cantidad durante los 3 primeros años y después efectuar 6 pagos anuales por vencido. Determinar la cuantía de estos pagos si utilizamos un tanto de interés del 3 %.

$V_0 = 20.000$ $d = 3$ años $n = 6$ años $i = 0,03$	$A_{6, 0,03} = \frac{(1,03)^6 - 1}{(1,03)^6 \times 0,03} = 5,417191$
	$V_0 = A \times A_{6, 0,03} \times (1,03)^{-3}$
	$20.000 = A \times 5,417191 \times 0,915142$
	$20.000 = A \times 4,957499$
	$A = 20.000 / 4,957499$
	$A = 4.034,29 \text{ €}$

4.2 VALOR FINAL

Para calcular el valor final no se tiene en cuenta el periodo de carencia.

$$d / V_n = A \times S_{n, i}$$

5. RENTAS CONSTANTES, VENCIDAS, INMEDIATAS, NO FRACCIONADAS Y PERPETUAS

	A	A	A	A	A	i
0 V_0	1	2	3	4	∞ V_n	

5.1. VALOR ACTUAL

$$V_0 = A / i$$

Ejemplo:

1. Calcula el valor actual de una renta, prepagable, perpetua, constante e inmediata de 10.000 €, anuales, sabiendo que el tipo de interés es del 3 %.

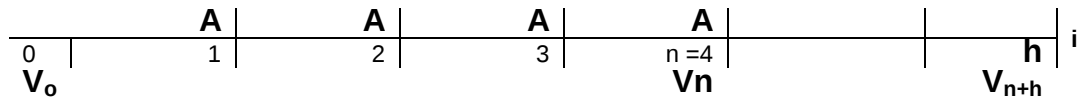
$V_0 = A / i$
$V_0 = 10.000 / 0,03$
$V_0 = 333.333,33 \text{ €}$

5.2 VALOR FINAL

No se puede calcular por tener una duración infinita.

6. RENTAS CONSTANTES, VENCIDAS, INMEDIATAS, NO FRACCIONADAS Y ANTICIPADAS

En general, diremos que una renta es anticipada cuando el **momento de su valoración es posterior al final de la renta**, por tanto, la anticipación sólo afectará a los valores finales.

**5.2. VALOR ACTUAL**

El valor final no cambia en las rentas anticipadas

5.2 VALOR FINAL

$$a/V_n = A \times S_{n,i} \times (1+i)^h$$

También se podría resolver calculando el valor actual de la renta y después la capitalizamos hasta el momento n+h.

$$a/V_n = A \times A_{n,i} \times (1+i)^{n+h}$$

1. Calcular el valor final de una renta postpagable, anticipada en 7 años, con 12 términos anuales de 50.000 euros cada uno, valorada al 8% de interés compuesto anual.

A = 50.000 € n = 12 términos i = 0,08 H = 7	$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	$S_{12, 0,08} = \frac{(1,08)^{12} - 1}{0,08} = 18,977126$
	$a/V_n = A \times S_{12, 0,08} \times (1,08)^7$ $a/V_n = 50.000 \times 18,977126 \times 1,713824$ $a/V_n = 1.626.172,70 \text{ €}$