

TEMA 4:

EQUIVALENCIA FINANCIERA

1. INTRODUCCIÓN

Estas operaciones se dan cuando una persona quiere sustituir uno o varios pagos que tiene que realizar (PRIMERA SITUACIÓN) por otros (SEGUNDA SITUACIÓN).

Para que el cambio se pueda realizar se debe cumplir que las dos situaciones, la anterior y la posterior al cambio, sean EQUIVALENTES, es decir, que los EFECTIVOS de ambas situaciones sean iguales.

- PRIMERA SITUACIÓN: Pagos a realizar antes del cambio. Se calcula su efectivo (E_1)
- SEGUNDA SITUACIÓN: Pagos a realizar después del cambio. Se calcula su efectivo (E_2)
- EQUIVALENCIA FINANCIERA: $E_1 = E_2$

Para calcular los efectivos utilizamos las fórmulas del descuento comercial.

1.1 SUSTITUCIÓN DE UN CAPITAL POR OTRO.

Ejemplo: Una persona tiene que pagar 3.000 € dentro de 30 días. Como ve que no va a poder atender a este pago, solicita su aplazamiento para dentro de 90 días calcula el nominal de este pago si utilizamos un tanto de descuento del 10 % anual. Utilizamos año comercial.

PRIMERA SITUACIÓN	$N = 3.000 \text{ €}$ $n = 30 \text{ días}$	$i = 0,10$
SEGUNDA SITUACIÓN	$N = X$ $n = 90 \text{ días}$	

1. PRIMERA SITUACIÓN	2. SEGUNDA SITUACIÓN
$E_1 = 3.000 * (1 - 30 * 0,10 / 360)$ $E_1 = 2.975 \text{ €}$	$E_2 = N * (1 - 90 * 0,10 / 360)$ $E_2 = N * 0,975$
3. EQUIVALENCIA FINANCIERA: $E_1 = E_2$	
$E_1 = E_2$ $2.975 = 0,975 * N$ $N = 3.051,28 \text{ €}$	

1.2 SUSTITUCIÓN DE VARIOS CAPITALES POR UNO

Ejemplo: Una persona debe pagar 10.000 € el 30-Octubre y 20.000 € el 30-Noviembre. El día 10 de Octubre acude a su banco para negociar la sustitución de estos pagos por uno sólo el día 30-Diciembre. Calcula el nominal de este nuevo pago si utilizamos un tanto de descuento del 8 % anual. Utilizar año comercial.

PRIMERA SITUACIÓN	10.000 € 30 – Octubre $n = 20 \text{ días}$	20.000 € 30 – Noviem. $n = 51 \text{ días}$	$i = 0,08$
SEGUNDA SITUACIÓN	10-Octubre N 30-Diciem. $n = 81 \text{ días}$		

Del 10-Octubre al 30 – Octubre Octubre: 30 – 10 = 20 Días: 20 días	Del 10 – Octubre al 30 – Noviembre Octubre: 31 – 10 = 21 Noviembre: 30 Días: 21 + 30 = 51 días	Del 10 – Octubre al 30 – Diciembre Octubre: 31-10 = 21 Noviembre: 30 Diciembre: 30 Días: 21 + 30 + 30 = 81 días
---	--	--

- PRIMERA SITUACIÓN:

NOMINALES	n	NÚMEROS COMER.
10.000	20	200.000
20.000	51	1.020.000
30.000	SUMAS	1.220.000

$$\begin{aligned}
 \text{SUMA NÚMEROS COMERCIALES} &= 1.220.000 \\
 \text{DIVISOR FIJO} &= 360 / 0,08 = 4.500 \\
 \text{DESCUENTO} &= 1.220.000 / 4.500 = 271,11 \text{ €} \\
 \text{EFECTIVO} &= 30.000 - 271,11 = 29.728,89 \text{ €} \\
 \mathbf{E_1} &= \mathbf{29.728,89 \text{ €}}
 \end{aligned}$$

- SEGUNDA SITUACIÓN:

$$\begin{aligned}
 E_2 &= N * (1 - 81 * 0,08 / 360) \\
 \mathbf{E_2} &= \mathbf{N * 0,982}
 \end{aligned}$$

- EQUIVALENCIA FINANCIERA:

$$E_1 = E_2$$

$$29.728,89 = N * 0,982$$

$$N = 30.273,82 \text{ €}$$

1.3. SUSTITUCIÓN DE VARIOS CAPITALES POR VARIOS

Ejemplo: Tenemos que efectuar dos pagos: uno de 3.000 € dentro de 3 meses y otro de 6.000 € dentro de 6 meses. Se quieren sustituir por otros dos: 5.000 € dentro de 9 meses y otro pago dentro de 1 año. Calcular el importe de este último pago si utilizamos un tanto de descuento del 8 % anual.

PRIMERA SITUAC.	N = 3.000 € n = 3 meses	N = 6.000 € n = 6 meses		i = 0,08
SEGUNDA SITUAC.		N = 5.000 € n = 9 meses	N n = 12 meses	

- PRIMERA SITUACIÓN

NOMINALES	n	NÚMEROS COMER.
3.000	3	9.000
6.000	6	36.000
9.000	SUMAS	45.000

SUMA NÚMEROS COMERCIALES = 45.000

DIVISOR FIJO = 12 / 0,08 = 150

DESCUENTO = 45.000 / 150 = 300 €

EFFECTIVO = 9.000 - 300 = 8.700 €

E₁ = 8.700 €

- SEGUNDA SITUACIÓN

$$E_2 = 5.000 * (1 - 9 * 0,08 / 12) + N * (1 - 12 * 0,08 / 12)$$

$$E_2 = 4.700 + N * 0,92$$

- EQUIVALENCIA FINANCIERA

$$E_1 = E_2$$

$$8.700 = 4.700 + N * 0,92$$

$$8.700 - 4.700 = N * 0,92$$

$$4.000 = N * 0,92$$

$$N = 4.347,83 \text{ €}$$

1.4 ELECCIÓN ENTRE VARIAS FORMAS DE PAGO

Ejemplo: Para comprar un ordenador que vale 2.000 €, nos ofrecen 3 formas de pago:

A) Pagar al contado con un descuento del 5 %.

B) Pagar 2.100 € dentro de 6 meses.

C) Pagar 400 € de entrada y 1.600 € dentro de 12 meses.

Elegir la opción más ventajosa para el comprador utilizando un tanto de descuento del 12 % anual.

A) $E = 2.000 - (5 * 2.000 / 100) = 1.900 \text{ €}$

B)

	N = 2.100	i = 0,12 anual
0	n = 6 meses	

$$E = 2.100 * (1 - 6 * 0,12 / 12) = 1.974 \text{ €}$$

C)

400 €	N = 1.600	i = 0,12 anual
0	n = 12 meses	

$$E = 400 + 1.600 * (1 - 12 * 0,12 / 12) = 1.808 \text{ €}$$

2. VENCIMIENTO COMÚN

Si en nuestro ejercicio debemos calcular el vencimiento de uno de los capitales de la segunda situación nos encontramos con el VENCIMIENTO COMÚN.

Ejemplo: Calcular el vencimiento común de dos capitales de 15.000 € y 35.000 € con vencimiento los días 15 de marzo y 15 de abril, respectivamente, sabiendo que se quiere sustituir por uno solo de 49.700 € y que el tipo de descuento es del 6 % anual. La operación de sustitución se realiza el 15 de enero.

PRIMERA SITUACIÓN	15.000 € 15 - marzo $n = 59$ días	35.000 € 15 - abril $n = 90$ días	$i = 0,06$
SEGUNDA SITUACIÓN	15 - enero	49.700 € n	

Del 15-enero al 15-marzo Enero: 31 – 15 = 16 Febrero: 28 Marzo: 15 Días: 16 + 28 + 15 = 59 días	Del 15-enero al 15-abril Enero: 31 – 15 = 16 Febrero: 28 Marzo: 31 Abril: 15 Días: 16 + 28 + 31 + 15 = 90 días
--	--

- PRIMERA SITUACIÓN:

NOMINALES	n	NÚMEROS COMER.
15.000	59	885.000
35.000	90	3.150.000
50.000	SUMAS	4.035.000

SUMA NÚMEROS COMERCIALES = 4.035.000

DIVISOR FIJO = 360 / 0,06 = 6.000

DESCUENTO = 4.035.000 / 6.000 = 672,50 €

EFECTIVO = 50.000 – 672,50 = 49.327,50 €

 $E_1 = 49.327,50$ €**- SEGUNDA SITUACIÓN:**

$$E_2 = 49.700 * (1 - n * 0,06 / 360)$$

$$E_2 = 49.700 - (49.700 * 0,06 / 360) * n$$

$$E_2 = 49.700 - 8,283333 * n$$

- EQUIVALENCIA FINANCIERA:

$$E_1 = E_2$$

$$49.327,50 = 49.700 - 8,283333 * n$$

$$49.327,50 - 49.700 = - 8,283333 * n$$

$$- 372,50 = - 8,283333 * n$$

$$n = 44,97 \text{ días}$$

Contamos 44 días a partir del 15 de enero. **El vencimiento será el 28 de febrero.****3. EL VENCIMIENTO MEDIO**

En los ejercicios en los que tengamos que calcular el vencimiento y nos encontramos que la suma de los capitales a sustituir sea igual a la suma de los capitales que los sustituyan, debemos utilizar la formula del vencimiento medio.

$n =$	$\frac{N_1 * n_1 + N_2 * n_2 + N_3 * n_3}{N_1 + N_2 + N_3}$	$N_1 + N_2 + N_3 = N$
-------	---	-----------------------

Ejemplo: Una persona tiene que efectuar 3 pagos de 1.000 €, 2.000 € y 3.000 € dentro de 30 ,60 y 90 días, respectivamente. Si se quieren sustituir por uno sólo de 6.000 € calcula el vencimiento de este nuevo pago.

$$\frac{1.000 * 30 + 2.000 * 60 + 3.000 * 90}{6.000}$$

$$\frac{30.000 + 120.000 + 270.000}{6.000}$$

$$n = 70 \text{ días}$$

3.1 CASO PARTICULAR DEL VENCIMIENTO MEDIO

Un caso particular del vencimiento medio nos lo encontramos cuando los capitales que se quieren sustituir son iguales:

$n =$	$\frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$
-------	-----------------------------

Ejemplo: Tres capitales de 3.000 € con vencimientos a los 30,40 y 60 días, quieren sustituirse por uno sólo de 9.000 € ¿Cuál será el vencimiento del mismo

$$n = (30 + 40 + 60) / 3 = 43,33 \text{ días}$$

4. EQUIVALENCIA DE CAPITALES EN CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Ejercicio: Comprobar que los capitales de 10.000, 5.000 y 3.300 €, cuyos vencimientos se producen dentro de 1,5, 2 y 4 años respectivamente, son equivalentes a los capitales 3.500, 4.000 y 14.280,31, con vencimiento dentro de 1,3 y 5 años si se valoran al 10 % anual y se comparan en capitalización compuesta.

$$E1 = \frac{10.000}{(1,1)^{1,5}} + \frac{5.000}{(1,1)^2} + \frac{3.300}{(1,1)^4}$$

$$E1 = 8.667,84 + 4.132,23 + 2.253,94$$

$$E1 = 15.054,01 \text{ €}$$

$$E2 = \frac{3.500}{(1,1)^1} + \frac{4.000}{(1,1)^3} + \frac{14.280,31}{(1,1)^5}$$

$$E2 = 3.181,82 + 3005,26 + 8.866,95$$

$$E2 = 15.054,03 \text{ €}$$

Ejercicio: Calcula el capital equivalente al conjunto de capitales 2.000, 5.000 y 3.300 €, con vencimiento dentro de 18 meses, 25 meses y 12 meses, si se desean sustituir por un capital con vencimiento dentro de 14 meses. Tanto de valoración 12 % anual.

$$(1 + i) = (1 + i_k)^k$$

$$1,12 = (1 + i_{12})^{12}$$

$$\sqrt[12]{1,12} - 1 = i_{12}$$

$$0,009489 = i_{12}$$

$$E1 = \frac{2.000}{(1,009489)^{18}} + \frac{5.000}{(1,009489)^{25}} + \frac{3.300}{(1,009489)^{12}}$$

$$E1 = 1.687,34 + 3.948,48 + 2.946,42$$

$$E1 = 8.582,24 \text{ €}$$

$$E2 = \frac{N}{(1,009489)^{14}}$$

$$E2 = \frac{N}{1,141359}$$

$$E1 = E2$$

$$8.582,24 = \frac{N}{1,141359}$$

$$N = 9.795,42 \text{ €}$$

5. VENCIMIENTO COMÚN EN CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Ejercicio: Calcular cuándo será equivalente un capital de 136.000 €, si se desea que sustituya a tres capitales de cuantía 24.000, 40.000 y 56.000 €, con vencimientos a los 4, 5 y 6 años respectivamente. Tanto de valoración: 5 % anual.

$$E1 = \frac{24.000}{(1,05)^4} + \frac{40.000}{(1,05)^5} + \frac{56.000}{(1,05)^6}$$

$$E1 = 19.744,86 + 31.341,05 + 41.788,06$$

$$E1 = 92.873,97 \text{ €}$$

$$E2 = \frac{136.000}{(1,05)^n}$$

$$E1 = E2$$

$$92.873,97 = \frac{136.000}{(1,05)^n}$$

$$92.873,97 \times (1,05)^n = 136.000$$

$$(1,05)^n = \frac{136.000}{92.873,97}$$

$$(1,05)^n = 1,46435$$

$$n \log 1,05 = \log 1,46435$$

$$n \times 0,021189 = 0,165645$$

$$n = 7,82 \text{ años}$$

1 año	-----	12 meses
0,82	-----	X

$$X = 9,84 \text{ meses}$$

6. TANTOS MEDIOS

Sean $C_1, C_2 \dots C_t$ un conjunto de capitales invertidos a unos tantos de interés $i_1, i_2, \dots, i_t$ durante n periodos, llamamos tanto medio i a aquel que aplicamos sobre ese conjunto de capitales durante esos n periodos produce el mismo montante o mismo interés que el grupo de capitales.

6.1 TANTO MEDIO EN CAPITALIZACIÓN SIMPLE

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = I$$

$$C_1 \times n \times i_1 + C_2 \times n \times i_2 + \dots + C_n \times n \times i_n = C \times n \times i$$

$$C_1 \times i_1 + C_2 \times i_2 + \dots + C_n \times i_n = C \times i$$

$$i = \frac{\sum_{h=1}^n C_h x i_h}{\sum_{h=1}^n C_h}$$

Ejemplo:

Bautista Flores tiene abiertas tres cuentas bancarias que le proporcionan la siguiente rentabilidad:

- a) Banco BASA, 6 % anual simple.
- b) Banco ZASA, 4 % anual simple.
- c) Banco TASA, 7 % anual simple.

En el primer banco tiene 2.000 €, en el segundo 3.500 € y en el tercero 8.000 €.

- a) ¿Cuál es el tanto medio de su inversión?
- b) Comprobar que se obtiene el mismo resultado sumando la capitalización de cada capital a su tipo de interés durante 1,5 años que capitalizando todos ellos al tipo de interés medio.

a)

2.000 x	0,06	= 120
3.500 x	0,04	= 140
8.000 x	0,07	= 560
13.500		820

$$i = \frac{820}{13.500} = 0,060741$$

b)

$I = 2.000 \times 1,5 \times$	0,06	= 180
$I = 3.500 \times 1,5 \times$	0,04	= 210
$I = 8.000 \times 1,5 \times$	0,07	= 840
		1.230

$$I = 13.500 \times 1,5 \times 0,060741$$

$$I = 1.230 \text{ €}$$

6.2. TANTO MEDIO EN CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Sean un conjunto de capitales C_h invertidos a unos tantos de interés, i_h durante n periodos, llamamos tanto medio i_m , a aquel que aplicado sobre ese conjunto de capitales durante esos n periodos producen el mismo montante, o mismo interés total, que el grupo de capitales.

$$C_1 (1+i_1)^n + C_2 (1+i_2)^n + \dots + C_h (1+i_h)^n = C_1 (1+i_m)^n + C_2 (1+i_m)^n + \dots + C_h (1+i_m)^n$$

$$C_1(1+i_1)^n + C_2(1+i_2)^n + \dots + C_h(1+i_h)^n = (C_1 + C_2 + \dots + C_h)(1+i_m)^n$$

$$\sum_{h=1}^n C_h(1+i_h)^n = \sum_{h=1}^n C_h(1+i_m)^n \quad \rightarrow \quad \frac{\sum_{h=1}^n C_h(1+i_h)^n}{\sum_{h=1}^n C_h} = (1+i_m)^n$$

tomando raíz e-nesima en ambos miembros y despejando i_m :

$$i_m = \left[\frac{\sum_{h=1}^n C_h(1+i_h)^n}{\sum_{h=1}^n C_h} \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Ejemplo 1:

El Sr. Rodríguez, posee tres inversiones diferentes a interés compuesto durante dos años y desea saber cual es la rentabilidad media de las mismas. Sabiendo que las inversiones son:

1. 8.700 euros al 4% anual
2. 10.000 euros al 5% anual
3. 12.300 euros al 6 % anual

$$i_m = \left[\frac{\sum_{h=1}^n C_h(1+i_h)^n}{\sum_{h=1}^n C_h} \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

h	C _h	(1+i) ⁿ	C _h (1+i) ⁿ
1	8.700	(1,04) ²	9.409,92
2	10.000	(1,05) ²	11.025,00
3	12.300	(1,06) ²	13.820,28
Totales	31.000		34.255,20

$$i_m = \left[\frac{34.255,20}{31.000} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0511929$$

$$i_m = 5,11\%$$

También:

$$\sum_{h=1}^n C_h(1+i_h)^n = \sum_{h=1}^n C_h(1+i_m)^n$$

$$8.700(1,04)^2 + 10.000(1,05)^2 + 12.300(1,06)^2 = 31.000(1+i_m)^2$$

$$i_m = 5,11\%$$