

TEMA 2: EL INTERÉS COMPUESTO

1. DIFERENCIA ENTRE INTERÉS SIMPLE Y EL INTERÉS COMPUESTO

INTERÉS SIMPLE	Los intereses no se acumulan al capital.
INTERÉS COMPUESTO	Los intereses se acumulan al capital.

FÓRMULAS DEL INTERÉS COMPUESTO	$C_n = C_0 * (1+i)^n$
	$I = C_n - C_0$

En los ejercicios intervienen las siguientes variables:

- *Capital inicial o actual (C₀)*: Cantidad referida al momento actual.
 - *Capital final o montante (C_n)*: Capital referido al final de la operación.
 - *Tiempo (n)*: duración de la operación.
 - *Tanto de interés anual (i)*: ganancia obtenida por un euro en un año.
- En los ejercicios de **inversión**, la cantidad invertida será el capital inicial y el importe que se recibe al final de la inversión, se denomina capital final o montante.
 - En los ejercicios de **préstamos**, la cantidad prestada es el capital inicial y la cantidad que devolvemos al final del periodo para cancelar el préstamo se denomina capital final o montante.

	CAPITAL INICIAL	CAPITAL FINAL
INVERSIÓN	Cantidad invertida	Cantidad que deseamos tener al final de la operación
PRÉSTAMO	Importe del préstamo	Cantidad necesaria para cancelar el préstamo

2. CÁLCULO DEL CAPITAL FINAL O MONTANTE. (OPERACIÓN DE CAPITALIZACIÓN)

Ejercicio: La señora Blasco deposita en una entidad financiera 30.000 € a plazo fijo durante 4 años a un tipo de interés compuesto del 10 % anual. Calcular la cantidad que recibirá al final de la operación.

$C_0 = 30.000 \text{ €}$	$C_n = X$	$i = 0.10 \text{ anual}$
0	$n = 4 \text{ años}$	

$C_0 = 30.000 \text{ €}$ $n = 4 \text{ años}$ $i = 0,10 \text{ anual}$	$C_n = C_0 * (1+i)^n$ $C_n = 30.000 * (1,1)^4$ $C_n = 43.923 \text{ €}$
--	---

3. CÁLCULO DEL CAPITAL INICIAL. (OPERACIÓN DE ACTUALIZACIÓN)

Ejercicio: Determina el capital inicial, que colocado al 7,5 % anual durante 6 años se ha convertido en un capital final de 50.000 €

$C_0 = X$	$C_n = 50.000 \text{ €}$	$i = 0,075 \text{ anual}$
0	$n = 6 \text{ años}$	

$C_n = 50.000 \text{ €}$ $n = 6 \text{ años}$ $i = 0,075 \text{ anual}$	$C_n = C_0 * (1+i)^n$ $50.000 = C_0 * (1,075)^6$ $50.000 = C_0 * 1,543302$ $C_0 = 50.000 / 1,543302$ $C_0 = 32.398,07 \text{ €}$
---	--

4. CÁLCULO DEL TIEMPO

Ejercicio: Calcula el tiempo que ha pasado desde que invertimos 4.150 € al 9,5 % de interés compuesto si al final de la operación hemos recibido 10.284,64 €

$C_0 = 4.150$	$C_n = 10.284,64 \text{ €}$	$i = 0,095 \text{ anual}$
0	$n = X \text{ años}$	

$C_0 = 4.150 \text{ €}$ $C_n = 10.284,64 \text{ €}$ $n = X \text{ años}$ $i = 0,095 \text{ anual}$	$C_n = C_0 * (1+i)^n$ $10.284,64 = 4.150 * (1,095)^n$ $10.284,64 / 4.150 = (1,095)^n$ $2,478227 = (1,095)^n$ $\log 2,478227 = n * \log 1,095$ $0,394141 = n * 0,039414$ $n = 0,39414 / 0,039414$ $n = 10 \text{ años}$
---	--

5. CÁLCULO DEL TANTO DE INTERÉS

Ejercicio: Calcula el tipo de interés al que estuvieron colocados 9.000 € durante 4 años, si se convirtieron en 14.000 €

$C_0 = 9.000 \text{ €}$	$C_n = 14.000 \text{ €}$	$i = X \text{ anual}$
0	$n = 4 \text{ años}$	

$C_0 = 9.000 \text{ €}$ $C_n = 14.000 \text{ €}$ $n = 4 \text{ años}$ $i = X$	$C_n = C_0 * (1+i)^n$ $14.000 = 9.000 * (1+i)^4$ $14.000 / 9.000 = (1+i)^4$ $1,555556 = (1+i)^4$ $\sqrt[4]{1,555556} = \sqrt[4]{(1+i)^4}$ $\sqrt[4]{1,555556} = 1+i$ $1,11679 = 1+i$ $i = 0,11679$
--	--

6. TANTOS FRACCIONADOS

El tipo de interés y la duración de la operación deben estar referidos a los mismos periodos de tiempo. Por este motivo, en los ejercicios en los que el periodo de tiempo sea inferior al año, debemos calcular el tanto de interés fraccionado.

El **tanto de interés fraccionado** (i_k) será un tanto que produzca los mismos resultados al año que los obtenidos si utilizamos el **tanto de interés anual efectivo** (i).

Para calcular el tanto de interés o fraccionado utilizamos la siguiente fórmula:

$$(1 + i_k)^K = (1 + i)$$

Siempre que en un ejercicio nos den un tanto de interés inferior a un año (mensual, trimestral, semestral, etc.) nos están facilitando el tanto fraccionado (i_k)

El **tanto nominal** (J_k) es el resultado de multiplicar $i_k * k$ y siempre está referido a un determinado periodo de tiempo. (Ejemplo: tanto nominal capitalizable por trimestres. Sería J_4)

$$J_k = i_k * k$$

TANTO DE INTERÉS EFECTIVO ANUAL (T.A.E)	i
TANTO NOMINAL	J_k
TANTO FRACCIONADO (mensual, trimestral, etc.)	i_k

Ejercicios:

1. Calcula el tanto de interés mensual equivalente a un tanto anual efectivo del 10 %.

$i_{12} = x$ $i = 0,10$	$(1 + i_{12})^{12} = (1 + i)$ $(1 + i_{12})^{12} = 1,10$ $\sqrt[12]{(1 + i_{12})^{12}} = \sqrt[12]{1,10}$ $1 + i_{12} = \sqrt[12]{1,10}$ $1 + i_{12} = 1,00797414$ $i_{12} = 0,00797414$
----------------------------	--

2. Calcular el tanto nominal convertible por semestres correspondiente al tanto anual efectivo del 6 %

$i = 0,06$ $j_2 = x$	$(1 + i_2)^2 = (1 + i)$ $(1 + i_2)^2 = 1,06$ $\sqrt[2]{(1 + i_2)^2} = \sqrt[2]{1,06}$ $1 + i_2 = \sqrt[2]{1,06}$ $1 + i_2 = 1,029563$ $i_2 = 0,029563$ $J_2 = 2 * 0,029563$ $J_2 = 0,059126$
-------------------------	--

3. Calcula el tanto anual efectivo equivalente al 2 % mensual.

$i_{12} = 0,02$ $i = x$	$(1 + i_{12})^{12} = (1 + i)$ $(1 + 0,02)^{12} = 1 + i$ $1,0268242 = 1 + i$ $1,0268242 - 1 = i$ $i = 0,268242$
----------------------------	--

7. PERIODOS DE TIEMPO FRACCIONADOS

Cuando la duración de la operación no corresponde a un número exacto de periodos de capitalización podemos resolver el ejercicio utilizando cualquiera de los siguientes métodos:

- **CONVENIO EXPONENCIAL:** Resolvemos el ejercicio utilizando solamente la fórmula del interés compuesto.

$$C_n = C_o * (1 + i)^{n+m}$$

- **CONVENIO LINEAL:** Resolvemos el ejercicio utilizando la fórmula del interés compuesto para los periodos completos y la del interés simple para la fracción.

$$C_n = C_o * (1 + i)^n * (1 + m * i)$$

m = número correspondiente al periodo no completo. Para ello planteamos una regla de tres.

Ejercicio: Calcula el montante de un capital de 60.000 € que ha estado invertido durante 3 años y 6 meses al 10 % de interés anual compuesto.

CÁLCULO DE LA FRACCIÓN (m)

1 año ----- 12 meses
m año ---- 6 meses
 $m = 0,5$

CONVENIO EXPONENCIAL

$C_o = 60.000$ €
 $n = 3$ años
 $m = 0,5$
 $i = 0,10$

$$C_n = C_o * (1 + i)^{n+m}$$

$$C_n = 60.000 * (1 + 0,10)^{3+0,5}$$

$$C_n = 60.000 * 1,395965$$

$$C_n = 83.757,87 \text{ €}$$

CONVENIO LINEAL

$C_o = 60.000$ €
 $n = 3$ años
 $m = 0,5$
 $i = 0,10$

$$C_n = C_o * (1 + i)^n * (1 + n * i)$$

$$C_n = 60.000 * (1 + 0,10)^3 * (1 + 0,5 * 0,10)$$

$$C_n = 60.000 * 1,331 * 1,05$$

$$C_n = 83.853 \text{ €}$$

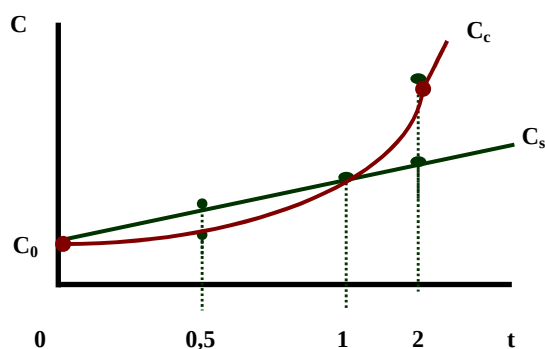
8. COMPARACIÓN ENTRE CAPITALIZACIÓN SIMPLE Y COMPUESTA

En capitalización simple: $\rightarrow C_n = C_0 (1 + ni)$

En capitalización compuesta: $\rightarrow C_n = C_0 (1 + i)^n$

Si lo representamos gráficamente, para i y C_0 constantes y damos los siguientes valores a n :

$n = 0$ $n = 0,5$
 $n = 1$ $n = 2$



RESUMEN:

- | | | | | |
|------------------|---|-------|---------------|---------|
| a) Para periodos | = | 0 ó 1 | $\rightarrow$ | CS = CC |
| b) Para periodos | < | 1 | $\rightarrow$ | CS > CC |
| c) Para periodos | > | 1 | $\rightarrow$ | CS < CC |

9. LA TASA ANUAL EQUIVALENTE (TAE)

La TAE, en nuestro país está regulada por la circular 8/90, de 7 de septiembre, del Banco de España (BE). Según la cual el tipo de interés, coste o rendimiento efectivo de las operaciones deberá expresarse, obligatoriamente, en prácticamente la totalidad de los documentos contractuales que afectan al pequeño inversor o ahorrador (apartado 1 norma sexta) y se calculará según la fórmula siguiente:

$$\sum_{n=1}^n D_n (1 + i_k)^{\frac{1}{t_n}} - \sum_{p=1}^p R_p (1 + i_k)^{\frac{1}{t_p}}$$

Siendo:

D_n = Disposiciones

R_p = Reintegros

n = número de disposiciones o entregas simbolizadas por D

p = número de reintegros o pagos simbolizados por R

t_n = tiempo transcurrido desde la fecha de equivalencia elegida hasta la de

disposición n . t_p = tiempo transcurrido desde la fecha de equivalencia elegida hasta la del pago p .

i_k = tanto efectivo referido al periodo de tiempo elegido para expresar t_p y t_p .

Como esta tasa se expresa en tantos por ciento y referida siempre al periodo de un año:

$$\text{TAE} = [(1 + i_k)^k - 1] \times 100$$

La TAE intenta ser una unidad homogénea de medida, para que los pequeños inversores principalmente, puedan comparar operaciones financieras.

nota 1: si no existiesen gastos en una operación financiera, la TAE coincidiría con el interés efectivo anual (i)

nota 2: en las cuentas corrientes y de ahorro, la misma circular del BE permite que la TAE que se aplique sea el interés nominal anual, cuando éste sea inferior o igual al 2,5%.

Ejemplo:

D. Juan Sánchez ha depositado 5.000 euros de sus ahorros en un novedoso instrumento financiero que le ha ofrecido su banco, según el cual la entidad le asegura un interés del 3% anual en una inversión de 600 días. Calcula:

- ¿Cuánto obtendrá al final de la operación?
- ¿Cuál será la TAE de este producto si no se cobra ninguna comisión?
- ¿Cuál será la TAE de este producto si se cobra una comisión del 1% sobre el montante?

- ¿Cuánto obtendrá al final de la operación?

$$\begin{aligned} (1 + i_{365})^{365} &= (1 + i) \\ (1 + i_{365})^{365} &= 1,03 \\ \sqrt[365]{(1 + i_{365})^{365}} &= \sqrt[365]{1,03} \\ 1 + i_{365} &= \sqrt[365]{1,03} \\ 1 + i_{365} &= 1,000080986 \\ i_{365} &= 0,000080986 \end{aligned}$$

$$C_n = 5.000 (1,000080986)^{600}$$

$$C_n = 5.248,95$$

- ¿Cuál será la TAE de este producto si no se cobra ninguna comisión?
Coincide con el tanto de interés anual: 3 %

- ¿Cuál será la TAE de este producto si se cobra una comisión del 1% sobre el montante?

Montante:	5.248,95
Comisión 1 %:	-52,49
Recibe:	5.196,46

$$C_n = C_0 (1 + ik)^{nk}$$

$$5.196,46 = 5.000 (1 + i_{365})^{600}$$

$$\frac{5.196,46}{5.000} = (1 + i_{365})^{600}$$

$$1,039292 = (1 + i_{365})^{600}$$

$$\sqrt[600]{1,039292} - 1 = i_{365}$$

$$0,000064235 = i_{365}$$

$$(1,000064235)^{365} = (1+i)$$

$$1,0237 = i$$

$$2,37 \% = \text{T.A.E.}$$